técnica

Revista de Engenharia

Publicação da Associação dos Est
do Instituto Superior Técnico

Técnica - revista de Engenharia

Propriedade: Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais 1000 Lisboa Portugal

Director Científico: Manuel de Abreu Faro
Director Executivo: Paulo David Simões
Coordenação Editorial: Elias Azevedo
Coordenação Administrativa: Gerardo Vieira Lisboa

Direcção, Administração e Publicidade:
Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais 1000 Lisboa Portugal
Telefones directos: 8481018 -8489323
Extensão IST: 1248-1260

Registo DGCS 101407
Depósito Legal 41683
ISSN 0040-1714

Tiragem: 5000 exemplares
Publicação Trimestral
Preço de capa: 300$00 assinatura anual (Portugal): 1000$00
(Estrangeiro): USD$12

Contribuiram para este número:
Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica
Conselho Directivo do Instituto Superior Técnico

Impressão: ARTE 2, Lda.

Técnica - número único de 1989 **Impressão: Dezembro de 1990**

EDITORIAL 2

Artigo Convidado

SOBRE A EXCITAÇÃO DE ONDAS COMETÁRIAS HIDROMAGNÉTICAS
Armando Larcher Brinca 3

Notas Técnico-Científicas

SOBRE A EQUIVALÊNCIA DAS FORMULAÇÕES DA ELECTRODINÂMICA DOS MEIOS EM MOVIMENTO
Manuel de Abreu Faro 9

POTÊNCIA E ATENUAÇÃO EM GUIAS DE ONDA
João Luís Sobrinho 17

EFFECT OF CURRENT ON GOLD ELECTROWINNING WITH FLUIDIZED BED ELECTRODE
C.A.C. Sequeira and F.D.S. Marques 21

MODELAÇÃO FÍSICO-MATEMÁTICA DOS FENÓMENOS OCORRENTES DENTRO DE CÂMARAS DE COMBUSTÃO
Maria da Graça Carvalho 27

SPECTRAL ESTIMATION IN THREE STEPS
M.D. Ortigueira and J.M. Tribolet 43

EDITORIAL

Num passado não distante a TÉCNICA configurou-se numa revista plena de interesse, integrando trabalhos de vanguarda nos domínios da ciência e da técnica.

Espera-se que a partir de 1991 retome o ritmo perdido.

Caminhar para esses objectivos e dar realidade às grandes finalidades de uma revista com a tradição da TÉCNICA é tarefa que apela necessariamente para os docentes, investigadores e alunos do I.S.T. e bem assim para todos aqueles que cultivam os domínios científicos e técnicos que servem a Engenharia.

Para relançar a revista há que acreditar na TÉCNICA, na acção que pode desenvolver na comunidade técnico-científica e, nomeadamente, ter presente que, em princípio, os artigos da TÉCNICA são referidos nos *Abstracts* das diferentes especialidades científicas. Assim tem acontecido.

SOBRE A EXCITAÇÃO DE ONDAS COMETÁRIAS HIDROMAGNÉTICAS

Armando Larcher Brinca

Instituto Superior Técnico

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

RESUMO

Uma breve introdução ao estudo dos cometas, e ao seu papel na evolução do planeta Terra, precede a análise de instabilidades de ondas hidromagnéticas estimuladas por iões cometários de hidrogénio e oxigénio. Utilização de diagramas de Brillouin generalizados clarifica a natureza física dos modos ondulatórios e mostra que a interacção entre os dois tipos de iões é geralmente fraca, com cada feixe excitando independentemente (em quase todo o plano de dispersão) instabilidades ressonantes homólogas. O ambiente cometário sugere os parâmetros do modelo adoptado, mas os resultados são utilizáveis na interpretação de outras observações espaciais de actividade ondulatória hidromagnética.

ABSTRACT

A brief introduction to comets and their role in the evolution of our planet precedes the study of hydromagnetic wave instabilities fed by coexisting newborn (cometary) hydrogen and oxygen ions. Utilization of generalized Brillouin diagrams clarifies the physical nature of the modes and shows that the interaction between the two ions is generally weak, with each beam exciting resonant instabilities without undue influence from the other newborn ion species in most dispersion domains. Although cometary environments suggest the parameters of the adopted model, the results are helpful in the interpretation of other hydromagnatic wave activity in space.

Precedemos a descrição das ondas cometárias hidromagnéticas de uma breve introdução motivadora do estudo dos cometas. Estes corpos são antepassados do Homem no sentido lato, e poderão ter contribuído decisivamente para o seu aparecimento. Ao investigarmos os cometas, investigamos as nossas origens.

PRIMÓRDIOS

Para o sistema solar, tudo terá começado há 4,6 milhares de milhões de anos numa nébula de gás e poeira em rotação. Por conservação da quantidade de momento angular, a sua contracção gravitacional é acompanhada de um aumento da velocidade de rotação. A interacção das forças de gravidade e centrífuga conduz à formação de um disco de acrescimento.

A condensação central eventualmente ultrapassa o limiar da ignição nuclear e origina o Sol. Instabilidades gravitacionais na nébula solar precipitam a formação rápida de inúmeros objectos com dimensões lineares da ordem de alguns quilómetros.Estes protocometas, por colisões e interacções gravitacionais, (i) evoluiram para os planetas, e (ii) foram expulsos (por influência de Jupiter e Saturno) do sistema solar, ou (iii) injectados (por influência de Urano e Neptuno) na Nuvem de Oort, zona exterior ao sistema solar que se estende até distâncias heliocêntricas da ordem de 1,6 anos luz.

Os cometas foram assim criados dentro da nébula solar, um pouco antes da formação dos planetas, há 4,6 milhares de milhões de anos. Tanto os cometas como os planetas são agregados de matéria interestelar condensada. A diferença reside na intensa reestruturação física e química a que foram submetidos os planetas durante a sua evolução, enquanto os cometas, conservados em condições ideais na Nuvem de Oort, se mantiveram relativamente imunes à acção do tempo.

Durante a translação do sistema solar em torno do centro galáctico da Via Láctea, perturbações gravitacionais estelares podem alterar algumas das órbitas (quasi-circulares) dos cometas na Nuvem de Oort para órbitas elípticas muito excêntricas que, por interacção com planetas, eventualmente se convertem em órbitas elípticas de períodos curtos (inferiores a 200 anos). Estas visitas cometárias transportam, portanto, uma fonte de matéria pristina e indicativa da composição da nébula solar.

Comunicação apresentada à Classe de Ciências da Academia das Ciências de Lisboa, na sessão de 21 de Abril de 1988.

Colisões cometárias

As visitas dos cometas ao sistema solar interior podem terminar por colisão com o Sol ou planetas. No caso da Terra, reconhecendo que os cometas são basicamente bolas de neve sujas [Whipple, 1950] com traços significativos de várias substâncias como o metano e a amónia, as colisões têm sido invocadas em vários contextos.

Parte importante da água nos oceanos poderá ter origem cometária. Também, se a atmosfera primitiva da Terra era pobre em hidrogénio (predominância de azoto e anidrido carbónico), os cometas podem ter transportado os ingredientes necessários à evolução prebiótica. Decomposição do vapor de água, metano e amónia por acção da radiação solar ultravioleta ou de descargas atmosféricas, seguida de recombinação, pode originar formaldeido e ácido cianídrico; estes, nas águas amoniacais da Terra primitiva, podem recombinar para formar os aminoácidos mais simples, ingredientes básicos das proteinas. Identicamente, poder-se-iam formar os componentes essenciais dos ácidos nucleicos. Estaria assim assegurada a síntese de moléculas orgânicas necessárias ao aparecimento da vida.

Mas nem sempre as colisões com cometas estão associadas à origem da vida. Evidência crescente, mas ainda controversa, aponta para uma colisão importante há cerca de 65 milhões de anos, na transição do período geológico Cretáceo para o Terciário. O inverno prolongado originado no bloqueamento da luz solar, com o consequente arrefecimento e interrupção da fotossíntese, poderá ter sido responsável pelas extinções maciças de espécies vegetais e animais nesta época, incluindo o desaparecimento dos dinoussauros. Curiosamente esta evolução abriu caminho à gradual predominância dos mamíferos e, espera-se, poderá contribuir para a sua sobrevivência por acção pedagógica dissuasora: poderiam ser idênticas as consequências de um inverno nuclear (provocado pelo Homem) e de um inverno cometário prolongado (cuja responsabilidade não cabe aos dinossauros). (Alguns investigadores julgam ter encontrado uma periodicidade da ordem dos 28 milhões de anos nas extinções maciças ocorridas na geo-história. Possíveis explicações para a intensificação das colisões cometárias com essa periodicidade incluem (i) a invocação de uma estrela companheira do Sol, a Nemesis, com uma órbita associada a esse período que, ao atravessar a Nuvem de Oort, origina as necessárias perturbações gravitacionais, e (ii) o movimento oscilatório do sistema solar relativamente ao plano da nossa galáxia, também com um período dessa ordem de grandeza.)

Lendas, mitos e Halley

Não surpreenderá que o aparecimento, por vezes exibindo formas espectaculares, dos cometas nos céus nocturnos dos nossos antepassados os tenham fortemente intrigado. Coincidência fortuitas das suas passagens com alguns acontecimentos importantes alimentaram uma mitologia, com tónica catastrófica, que só gradualmente sucumbiu ao progresso dos conhecimentos.

A referência mais antiga a cometas chegada aos nossos dias é uma frase chinesa de 1500 anos a.C.: "Quando (o imperador) Chieh executou os seus fiéis conselheiros, apareceu um cometa". A tapeçaria de Bayeux sugere que o cometa de 1066 foi responsável pela deposição do rei Harold de Inglaterra, imposta pelos invasores Normandos. Montezuma II do México considera que a chegada de Cortez foi anunciada por um ominoso cometa. A observação por Halley, na sua infância (8-9 anos), dos cometas de 1664, associado à Grande Peste de Londres, e de 1665, coincidente com o Grande Incêndio de Londres, poderá ter marcado os seus interesses científicos.

Edmond Halley, nascido em 1656, publicou o seu primeiro artigo aos 18 anos no "Philosophical Transactions" da "Royal Society of London"; intitulava-se "Um método directo e geométrico para a determinação dos afélios, excentricidades e proporções (das órbitas) dos planetas primários que dispensa a hipótese da igualdade do movimento angular". Com 21 anos dirigiu uma missão à ilha de Santa Helena para efectuar o levantamento das estrelas do hemisfério celeste austral. Em 1684 desloca-se a Cambridge para discutir com Isaac Newton a órbita dos planetas. Newton envia-lhe porteriormente o manuscrito em latim "De motu corporum in gyrum" onde prova que a lei da atracção universal com o inverso do quadrado da distância implica a satisfação das três leis de Kepler. Apercebendo-se da importância deste trabalho, Halley regressa a Cambridge e insiste com Newton para expandir as suas ideias num livro. Halley acaba por pagar a publicação dos "Principia Mathematica" porque a "Royal Society" não dispunha, na altura, de verbas para o efeito.

Em 1705 Halley edita "Uma sinopse da astronomia dos cometas" onde, por aplicação das Leis de Newton, determina as órbitas de cometas e postula o reaparecimento do cometa que hoje tem o seu nome (curiosamente, Newton inclinava-se para trajectórias cometárias parabólicas). De sublinhar, no entanto, que a influência das contribuições científicas de Halley resistiria à amputação deste seu trabalho. De facto, foi ainda um fundador da geofísica, com especial interesse pelo geomagnetismo e o seu ecletismo pode-se inferir da publicação em 1691, aos 35 anos, de artigos sobre: a distância Terra-Sol, o comportamento do vapor de água na atmosfera, a matemática das grandezas infinitas, a espessura de filmes de ouro, a invasão de Inglaterra por Júlio César, e a História Nàtural de Plínio. Escreveu o seu último artigo científico, sobre um eclipse lunar, aos 81 anos, quatro anos antes de falecer.

Cometologia moderna

A desmitificação resultante das investigações de Halley introduziu o estudo dos cometas na sua era moderna. Ao interesse pelo cálculo das órbitas, sucederá até ao presente a curiosidade pelo cometa propriamente dito (sua origem e constituição), pela sua interacção com o meio ambiente, e pelo seu papel na evolução terrestre.

A seguir à Segunda Guerra Mundial, Ludwig Biermann conclui, por observação das caudas dos cometas, que deveria existir um fluxo permanente de partículas originado no Sol, o que veio a ser confirmado directamente pela nave soviética Luna 3, em 1959, com a primeira observação do vento solar.

Há cerca de dez anos, um grupo de cientistas da Universidade da Califórnia em Berkeley que incluia Luis Alvarez, prémio Nobel de Física e seu filho géologo Walter Alvarez, investigou a constituição de uma fina camada de barro cinzento separando sedimentos correspondentes aos períodos Cretáceo e Terciário, em Gubbio, Itália. Verificou-se que esse barro era significativamente (cerca de 30 vezes) mais rico em irídio do que as camadas contíguas. Esta constatação, posteriormente confirmada noutros pontos do globo, sugere a colisão da Terra com um corpo extraterrestre há cerca de 65 milhões de anos, aquando da extinção maciça de espécies animais e vegetais, na transição do Cretáceo para o Terciário. Isto porque os espectros estelares e a constituição dos meteoritos mostram que a matéria extraterrestre é mais rica em vários elementos, entre os quais o irídio. (Tendo as matérias terrestre e extraterrestre uma origem interestelar comum, as suas diferentes composições parecem paradoxiais, mas são justificáveis. Os elementos em que a matéria extraterrestre é mais rica -- irídio, ósmio, ródio, ouro, platina, -- tendem a acompanhar, quando fundidos, o ferro; na recém formada Terra, com as rochas ainda fluidas, o ferro concentrou-se no núcleo líquido central, arrastando com ele estes elementos e criando, portanto, a correspondente rarefacção superficial.) Mais recentemente, variações detectadas na razão das concentrações dos isótopos 87 e 86 de estrôncio para a transição sedimentar em causa sugerem a ocorrência de intensa chuva ácida que poderá ter contribuído para a extinção de espécies.

Com a aproximação do regresso do cometa Halley em 1986, já em plena época de exploração espacial, vários grupos de investigação aproveitaram a oportunidade para realizar pela primeira vez observações "in situ". Os europeus, em homenagem ao autor do fresco 'Adoração dos Magos' (Capela de Arena, em Pádua), onde o cometa de Halley na sua aparição de 1301 é utilizado como estrela de Belem, designaram a missão espacial por Giotto (di Bondone). Os japoneses enviaram duas sondas, Sakigake ("pioneiro") e Suisei ("cometa"). Os soviéticos lançaram as naves Vega 1 e 2 ("VEnera + GAlley" = Venus + Halley; a língua russa não tem a letra H, usando o G aspirado em sua substituição) que passaram primeiro por Venus. A missão ISEE-3 foi adaptada à missão ICE ("International Cometary Explorer"), por forma a observar o cometa Giacobini-Zinner e, a grande distância, o cometa Halley. No ano anterior, tendo em vista uma melhor compreensão da fenomenologia associada à interacção do vento solar com cometas, a missão AMPTE ("Active Magnetospheric Particle Tracer Explorers") tinha criado 'cometas artificiais' através da libertação de iões de bário na bainha magnética (região do geoplasma entre o choque em arco e a magnetopausa).

De todas estas missões resultou uma impressionante acumulação de dados (de que as ondas cometárias hidromagnéticas representam uma componente muito restrita), objecto de aturada análise e interpretação, e, não surpreendentemente, um intensificado interesse científico na realização de missões cometárias mais ambiciosas. Está neste caso o projecto CRAF ("Comet Rendezvous and Asteroid Flyby"), a lançar em Agosto de 1995; trata-se da primeira missão do tipo Mariner Mark II, sendo curioso referir estar conjuntamente programada a missão Cassini*, a Saturno e ao seu satélite Titan cuja termodinâmica foi objecto de comunicação (4 de Fevereiro de 1988) à Academia das Ciências de Lisboa pelo Professor Jorge Calado.

A missão CRAF, para além de observar o asteróide Hamburga, em contraste com as missões pontuais ao cometa Halley, faz o acompanhamento do cometa Kopff desde antes do afélio até depois do periélio. Haverá assim aportunidade de analisar em detalhe a evolução do cometa na sua aproximação do Sol e concomitante interacção com o vento solar, e determinar a sua composição com a utilização de uma sonda que penetrará o núcleo do cometa.

Ondas cometárias: observações e ressonância ciclotrónica

As observações de turbulência hidromagnética efectuadas pelas missões cometárias são dignas de realce. Por exemplo [Tsurutani e Smith, 1986], a turbulência que envolve Giacobini-Zinner atinge distâncias cometocêntricas da ordem do milhão de quilómetros, e intensidades três ordens de grandeza acima da actividade ondulatória média no vento solar. No que se segue, tentaremos identificar fontes de energia livre e instabilidades ondulatórias

* O astrónomo italiano Gian Domenico Cassini foi nomeado por Luis XIV como primeiro director do Observatório de Paris. Descobriu quatro satélites de Saturno e o primeiro indício (Divisão de Cassini) da existência de estrutura nos anéis deste planeta. Sugeriu a Halley que o grande cometa de 1680 era o mesmo que tinha sido observado por Tycho Brahe em 1577; embora errada, a sugestão implicava a periodicidade do movimento de (alguns) cometas e pode ter desempenhado um papel seminal no trabalho cometário de Halley.

potencialmente responsáveis pela excitação desta turbulência hidromagnética ("Hidromagnético" significa aqui terem estas ondas electromagnéticas frequências menores do que a frequência híbrida inferior do hidrogénio, no referencial do vento solar).
Ao aproximar-se do Sol, a superfície do cometa sublima-se. Os gases libertados são eventualmente ionizados pela radiação ultravioleta, ou por troca de carga eléctrica com partículas do vento solar. Os iões cometários recém criados apresentam uma velocidade instantânea relativamente ao vento solar de ~400 km/s, e a trajectória que traçam depende da orientação relativa (ângulo α) da velocidade do vento solar, $\mathbf{V}_{sw}$, e do campo magnético interplanetário, $\mathbf{B}_0$. No referencial do vento solar, a componente paralela (a $\mathbf{B}_0$) da velocidade iónica, V_{sw} cos α, permanece constante, enquanto que a componente perpendicular, $\mathbf{V}_{sw}$ sin α, está associada a um movimento ciclotrónico circular. Forma-se no espaço das velocidades uma distribuição em anel perpendicular, animada de um movimento paralelo de deriva. Surgem assim duas fontes de energia iónica que, em condições adequadas, poderão estimular a excitação de modos ondulatórios: a energia perpendicular e a energia paralela de deriva.
Um mecanismo que torna possível a transferência de energia das partículas cometárias para as ondas, é a ressonância ciclotrónica. Num magnetoplasma, as ondas electromagnéticas paralelas têm necessáriamente polarização circular (esquerda ou direita, conforme rodam no sentido do movimento ciclotrónico das cargas positivas ou negativas, respectivamente), rodando os seus campos num ponto do espaço com a velocidade angular correspondente à sua frequência ω. Cargas eléctricas sem velocidade paralela exibem um movimento circular puro com velocidade angular Ω diferente, em geral, de ω. Ressonância ciclotrónica (e, portanto, forte interacção onda-partícula) ocorrerá se, (i) existindo movimento paralelo das partículas com velocidade V, o associado efeito de Doppler kV (onde k é o número de onda da excitação com frequência ω) fizer coincidir a frequência ciclotrónica da partícula com a frequência da onda por ela sentida, Ω = ω - kV e, (ii) os sentidos de rotação dos campos da onda e da velocidade perpendicular da partícula forem coincidentes.
A visualização das condições de ressonância é facilitada pelo traçado de diagramas de Brillouin onde se representa a dispersão das ondas e o efeito de Doppler no feixe de partículas. A representação clássica num quadrante único, com ω e k positivos, torna-se, no entanto, confusa por requerer consideração simultânea da polarização das ondas, sinais das cargas eléctricas, e sentido relativo de propagação. Mais atraente [Brinca e Tsurutani, 1988] é a utilização dos quatro quadrantes do plano de Brillouin, onde ocorre naturalmente a separação dos modos em função da sua polarização e sentido de propagação em relação à velocidade paralela de deriva das partículas ressonantes. Todas as intersecções ocorridas no plano de Brillouin entre as curvas de dispersão dos modos e do feixe correspondem a ressonâncias ciclotrónicas reais. Como decorre da topologia das ondas hidromagnéticas paralelas [Brinca e Tsurutani, 1988], uma grande variedade de interacções onda-partícula pode ter lugar, muito embora seja impossível (por motivos fisicamente óbvios) a ressonância ciclotrónica entre feixes positivos e ondas de polarização circular direita com sentidos de propagação opostos.
Frisamos que, apesar destes diagramas ajudarem à interpretação física da interacção, a globabilidade da ressonância ciclotrónica não fica caracterizada completamente. Em particular, (i) não se infere quando a interacção origina crescimento, ou atenuação, da onda, (ii) a energia perpendicular do feixe de partículas não é considerada, e (iii) existem instabilidades não ressonantes cuja natureza dispensa a ocorrência da interacção ciclotrónica. Na particularização para os cometas devemos ainda ter presente que (a) existem vários tipos de iões cometários (por exemplo, iões de hidrogénio e oxigénio); (b) a velocidade de deriva paralela dos iões cometários é dada por V_{sw} cos α; (c) as grandes gamas de frequência e número de onda a cobrir para o estudo das ondas hidromagnéticas aconselha a adopção de escalas logarítmicas nos diagramas de Brillouin, o que vai distorcer as formas familiares das curvas de dispersão dos feixes e das ondas.

Ondas cometárias: Modelação e análise linear

O modelo adoptado no estudo da estabilidade dos modos hidromagnéticos num ambiente cometário utiliza o vento solar como referencial. Assume-se composto por populações maxwellianas de protões e electrões, com densidade comum $N_e = N_p = 4{,}95/cm^3$ e temperaturas $T_e = 2x10^5$ K e $T_p = 8x10^4$ K; a sua velocidade relativamente ao cometa tem um módulo $V_{sw} = 400$ km/s e o campo magnético interplanetário, com uma amplitude $B_0 = 8$ nT, forma um ângulo α (parâmetro variável do modelo) com $\mathbf{V}_{sw}$. Este vento solar é permeado por populações cometárias ténues de iões de hidrogénio (p_i), oxigénio (o) e correspondentes fotoelectrões (e_i), com densidades $N_{pi} = N_o = N_{ei}/2 = 0{,}05/cm^3$. As distribuições de velocidade são separáveis em $V_\perp$ e $V_\parallel$ (orientações relativas a $\mathbf{B}_0$); a distribuição paralela é maxwelliana com uma temperatura de 0,01 eV e velocidade de deriva V_{sw} cos α, e a distribuição perpendicular, de forma arbitrária (não afecta a estabilidade dos modos de propagação paralela), apresenta um valor quadrático médio $V_{sw}^2 \sin^2 \alpha$. O estado de equilíbrio deste magnetoplasma com cinco populações tem, portanto, carga global e corrente nulas.
A linearização das equações de Maxwell e Vlasov para amplitudes complexas dos campos variando

como exp i (**K.r**-ωt) define a equação cinética de dispersão $D(\omega=\omega_r+i\gamma, K) = 0$ do meio em análise. Num problema de valores iniciais, o vector de onda **K** é real e alinhado com o eixo dos zz (e com $\mathbf{B}_o$); modos instáveis têm $\gamma>0$. As partículas cometárias apresentam uma velocidade de deriva ao longo de $\mathbf{B}_o$, $V_{sw}\cos\alpha$, e os modos electromagnéticos paralelos com polarização circular (esquerda ou direita) propagam-se no mesmo sentido, ou sentido oposto, da deriva cometária. O programa WHAMP [Rönmark, 1982] resolve numericamente a equação de dispersão exacta, e os resultados são apresentados por forma a caracterizar a estabilidade hidromagnética do meio em função do ângulo α, e das temperaturas e densidades cometárias [Brinca e Tsurutani, 1988].

Ondas cometárias: Resultados e conclusões

A Figura 1 mostra os resultados obtidos para $\alpha=45°$, valor típico associado à espiral do campo magnético interplanetário a uma distância heliocêntrica de uma unidade astronómica. O painel superior mostra o diagrama de Brillouin; as taxas de crescimento dos modos predominantemente associados com os feixes de protões e oxigénio ionizado estão indicadas nos paineis médio e inferior, respectivamente. Os modos são identificados pela sua polarização circular (L - esquerda, R - direita), sentido de propagação (F - com a deriva dos feixes cometários, B - contra), feixe cometário (P - protões, O - oxigénio) e frequência (H - 'alta', S - 'baixa').

Cada feixe excita instabilidades idênticas. Os modos LFPH e LFOH são ondas ciclotrónicas próprias dos feixes: a sua ocorrência não depende da existência do vento solar de fundo. Estas oscilações (ondas ionico-ciclotrónicas) com $\omega\approx\Omega_s$ (s=p, o) no referencial dos feixes, satisfazem, por efeito de Doppler, a $\omega\approx\Omega_s + kV_{sw}\cos\alpha$ no referencial do vento solar. A sua fonte de energia livre reside na anisotropia (excesso de energia perpendicular relativamente à energia térmica paralela) dos iões cometários. Os modos RFPH e RFOH exibem taxas de crescimento máximo na vizinhança das interacções das curvas de dispersão dos modos RF do vento solar não perturbado e das curvas de dispersão dos feixes, confirmando a sua natureza ressonante ciclotrónica. Os feixes cometários impõem ainda o acoplamento entre os modos LB (LBPS e LBOS) e os modos RF (RFPS e RFOS), criando os modos mistos MP e MO. A transição entre os modos LB e RF implica a ocorrência de estruturas não oscilatórias ($\omega_r=0$), puramente crescentes ($\gamma>0$).

Como discutido em pormenor por Brinca e Tsurutani [1988], a topologia das instabilidades hidromagnéticas é alterada quando ocorrem modificações no vento solar de fundo (variações do ângulo α, em particular), ou nas populações cometárias (densidades e temperaturas). Análise da evolução das características dos modos intervenientes permite extrair conclusões relevantes

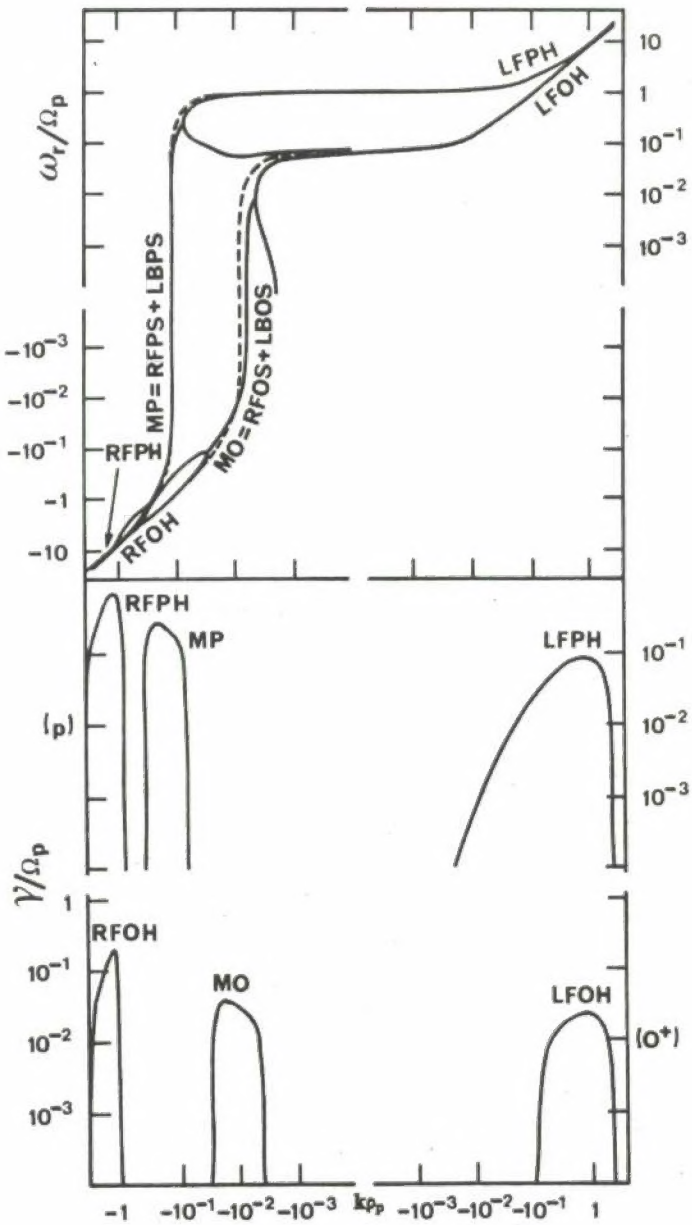

Figura 1

(Painel superior) Diagrama de Brillouin generalizado dos modos electromagnéticos paralelos excitados no modelo nominal do ambiente cometário, para $\alpha = \pi/4$. (Paineis inferiores) Taxas de crescimento correspondentes. As curvas a tracejado representam as curvas de dispersão dos feixes. A notação utilizada na identificação das instabilidades está definida no texto. Os quadrantes superiores, $\omega_r>0$, (inferiores, $\omega_r<0$) do plano de Brillouin estão associados a modos com polarização circular esquerda (direita). Nos quadrantes $k\omega_r>0$ ($k\omega_r<0$) os modos propagam-se em sentido idêntico (oposto) ao da deriva paralela dos iões cometários. A frequência angular ciclotrónica e o raio de giração térmico dos protões do vento solar normalizam as escalas axiais, $\Omega_p = 2\pi \times 0{,}122$ rad/s e $\rho_p = 47{,}4$ km.

para a interpretação das observações da actividade ondulatória em ambientes cometários:

- É razoável estimar os efeitos dos dois feixes cometários (iões de hidrogénio e oxigénio) como resultando da sobreposição da dispersão de cada um

(a sua interacção mútua é fraca). De notar, no entanto, que a coexistência de feixes cometários de iões pesados com massas similares origina fenomenologia distinta [Brinca e Tsurutani, 1989 b].
- Os modos LFPH e LFOH não suportam aumentos (mesmo moderados) na temperatura paralelos dos feixes.
- Os feixes de protões geram taxas de crescimento ondulatório mais fortes do que os feixes de oxigénio quando as densidades cometárias são elevadas. À medida que nos afastamos do núcleo do cometa (e estas densidades decrescem), a hierarquia do crescimento altera-se e os modos associados aos iões de oxigénio predominam (marginalmente).
- A alteração introduzida na dispersão básica do magnetoplasma com a adição de iões pesados (oxigénio) origina o aparecimento de um novo modo electromagnético com polarização circular esquerda cujas propriedades de propagação oblíqua (polarização, taxa de crescimento e compressibilidade) merecem, pela sua especificidade, investigação separada [Brinca e Tsurutani, 1987].

A aplicação dos resultados desta análise sobre o comportamento das instabilidades hidromagnéticas paralelas à turbulência cometária e outros ambientes espaciais deve ainda ser complementada com investigações similares para propagação oblíqua [Brinca e Tsurutani, 1989 a], e com o estudo (possivelmente com códigos de simulação nimérica) das correspondentes evoluções não lineares dos modos instáveis.

Agradecimentos

Parte da actividade desenvolveu-se no 'Jet Propulsion Laboratory' do 'California Institute of Technology', Pasadena, E.U.A., onde beneficiou da interacção com Bruce T. Tsurutani. Em Lisboa, a investigação decorreu no Centro de Electrodinâmica da U.T.L., do I.N.I.C., no âmbito do projecto NATO 669/84.

Referências

[1] Brinca, A.L., e B.T. Tsurutani (1987). Unusual characteristics of electromagnetic waves excited by cometary newborn ions with large perpendicular energies, *Astron. Astrophys.*, **187**, 311.
[2] Brinca, A.L., e B.T. Tsurutani (1988). Survey of low-frequency electromagnetic waves stimulated by two coexisting newborn ion species, *J. Geophys. Res.*, **93**, 48.
[3] Brinca, A.L., e B.T. Tsurutani (1989 a). The oblique behavior of low-frequency electromagnetic waves excited by newborn cometary ions, *J. Geophys. Res.*, **94**, 3.
[4] Brinca, A.L., e B.T. Tsurutani (1989 b). Influence of multiple ion species on low-frequency electromagnetic wave instabilities, *J. Geophys. Res.*, **94**, 13565.
[5] Rönmark, K. (1982). *WHAMP-Waves in Homogeneous, Anisotropic Multicomponent Plasmas*, Rep. 179, Kiruna Geophys. Inst., Kiruna, Suécia.
[6] Sagan, C., e A. Druyan (1985). *Comet*, Random House, New York [Referência geral].
[7] Tsurutani. B.T., e E. J. Smith (1986). Strong hydromagnetic turbulence associated with comet Giacobini-Zinner, *Geophys. Res. Lett.*, **13**, 259.
[8] Whipple, F.L. (1950). A comet model - I. The acceleration of comet Encke, *Astrophys. J.*, **111**, 375.

SOBRE A EQUIVALÊNCIA DAS FORMULAÇÕES DA ELECTRODINÂMICA DOS MEIOS EM MOVIMENTO*

Manuel de Abreu Faro

Instituto Superior Técnico
Centro de Electrodinâmica da UTL, do INIC.

RESUMO

Apresentam-se quatro das mais conhecidas formulações da Electrodinâmica dos Meios em Movimento: a de Minkowski, a de Chu, a Amperiana e a de Boffi.
Como Tai tem vindo a demonstrar, são equivalentes.
Na nossa opinião a de Minkowski prima pela simplicidade, e por isso a adoptámos.
Seguimos um método de demonstração que complementa a demonstração de Tai, e com isso julgamos ter contribuido para reforçar a convicção da equivalência das diversas formulações.

ABSTRACT

Four of the most widely known formulations of Electrodynamics in Moving Media are presented: Minkowski's, Chu's, Boffi's and Amperian formulation.
In accordance with Tai's recent demonstration, they are equivalent.
In our opinion, Minkowski's formulation stands out for its simplicity, and we have, therefore, adopted it.
Having followed a demonstration method that complements Tai's demonstration, we believe to have contributed to strengthen the assumption of the equivalence of the various formulations.

1. INTRODUÇÃO

Foi sob o título de "Sobre a Electrodinâmica dos Corpos em Movimento" que Einstein, em 1905, apresentou a Teoria da Relatividade Restrita [1].
No entanto, não entrou no pormenor das equações referentes a meios materiais [2].
Minkowski, em 1908, em plena posse do "principio de relatividade" foi quem finalmente resolveu o problema da Electrodinâmica dos Meios em Movimento.
Assim, ou quase assim, nos diz sobre o assunto Sommerfeld [2].
Fundamentalmente, trata-se de uma teoria macroscópica estruturada a partir de quatro entidades E, B, D e H, duas a duas constituindo tensores anti-simétricos de segunda ordem:

Tensor campo electromagnético $\rightarrow [E, B] \rightarrow F_{ik}$
Tensor excitação $\rightarrow [D, H] \rightarrow G^{ik}$ (1)

É notável que as equações de Maxwell

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \nabla . B = 0$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \qquad \nabla . D = \rho \qquad (2)$$

consintam essa formulação tensorial.
As equações de Maxwell são compatíveis com a equação de continuidade associada ao movimento das cargas eléctricas

$$\nabla . J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (3)$$

Não se tratando de uma teoria arquitectada a partir de distribuições físicas de cargas e correntes era natural que se viesse a defrontar com outras.
Assim sucedeu.
Das diversas formulações possíveis, [3], apenas trataremos de quatro o que é suficiente para elucidar a natureza da questão abordada.
A formulação de Minkowski não recorre a modelos.

* Actividade desenvolvida no âmbito do Centro de Electrodinâmica, da UTL, do INIC.
Comunicação apresentada à Classe de Ciências em 17 de Julho de 1986. Memórias da Academia das Ciências de Lisboa, Tomo XXVII, 1986.

As outras teorias recorrem a modelos, mas isso não implica que fisicamente o modelo exista. Basta que permita calcular correctamente o campo macroscópico.
Como Tai tem vindo a demonstrar, [3] e [4], as diferentes formulações são equivalentes.
O mesmo concluem Penfield e Haus, [5].
Como tantas vezes tem sucedido, apenas haverá razões de simplicidade suficiente, de elegância conseguida, em última análise apenas haverá lugar para uma opção essencialmente estética.
Apesar de ser assim, não estamos certos de que a questão se tenha encerrado.
Usando uma aproximação de natureza física demonstraremos a referida equivalência.

2. QUATRO POSSÍVEIS FORMULAÇÕES

Até hoje salientaram-se as seguintes formulações:

M - Minkowski, 1908 [Sommerfeld, 1952].
Entidades fundamentais [E,B] e [D,H]:
Teoria EBDH.
Entidades definidas

$$P = D - \varepsilon_o E \tag{4a}$$

$$M = \frac{B}{\mu_o} - H \tag{4b}$$

Não recorre a modelos.

C - Chu, 1960.
Entidades fundamentais [E,H] e [P,M]:
Teoria EHPMv.
Recorre a modelos:
Uma distribuição de dipolos eléctricos

$$P = n_e q_e l_e \tag{5}$$

Uma distribuição de dipolos magnéticos

$$\mu_o M = n_m q_m l_m$$

Explicita a velocidade v do meio em relação ao referencial de repouso macroscópico.
Como é evidente, n_e e n_m são densidades volúmicas, q_e e q_m cargas eléctricas e magnéticas e l_e e l_m as distâncias orientadas entre cargas.

A - Formulação Amperiana.
Panofsky e Philips, M = 0, 1950,
Fano, Chu e Adler, 1960.
Entidades fundamentais [E,B] e [P,M]:
Teoria EBPMv.
Recorre a:
Uma distribuição de dipolos eléctricos

$$P = n_e q_e l_e \tag{6}$$

Uma distribuição de correntes eléctricas

$$M = n_a I_e a_e$$

Em que n_a representa uma densidade volúmica de correntes eléctricas I_e circulando em espiras elementares a que correspondem áreas orientadas a_e.
Explicita a velocidade relativa ao repouso, v.

B - Boffi, 1957.
Entidades fundamentais [E,B] e [P,M]:
Teoria EBPM.
Na base das distribuições da formulação Amperiana:

$$P^A = n_e q_e l_e$$
$$M^A = n_a I_e a_e \tag{7}$$

utiliza uma polarização e uma magnetização equivalentes definidas por

$$P^B = P^A - \frac{M^A \times v}{c^2}$$
$$M^B = M^A + P^A \times v \tag{8}$$

3. COMPARAÇÃO PRÉVIA DAS QUATRO FORMULAÇÕES

No referencial onde a matéria está em repouso os campos de idêntica designação coincidem, observando-se as seguintes correspondências:

M - Minkowski	E	B	$D-\varepsilon_0 E$	$(B/\mu_0)-H$
C - Chu	E	$\mu_0(H+M)$	P	M
A - Amperiana	E	B	P	M
B - Boffi	E	B	P	M

(9a)

Verificam-se, portanto, as relações

$$P = D - \varepsilon_0 E \qquad M = (B/\mu_0) - H \tag{9b}$$

No vácuo as quatro teorias reduzem-se a uma teoria comum que está bem comprovada.
Em qualquer das teorias, J e ρ constituem um quadrivector

$$(J^i) = [J, c\rho] \tag{9c}$$

Os tensores momento-energia conduzem aos mesmos efeitos mecânicos embora se ofereçam com diferente partição.

4. FONTES E VÓRTICES DO CAMPO E CORRESPONDENTES EQUAÇÕES DE MAXWELL

Na base dos modelos descritos na secção anterior, podemos escrever imediatamente as fontes e vórtices das equações de Maxwell.
Basta aplicar as equações da Electrodinâmica no vácuo a cada uma das distribuições consideradas e ter presente as definições das densidades de correntes eléctrica e magnética de deslocamento. Deste modo se obtêm correntes e cargas cujas densidades se unem formalmente aos outros vórtices e outras fontes de campo.
Na formulação de Minkowski não há outras distribuições que não sejam ρ e J e assim teremos:

Fontes do campo:

$$\rho \rightarrow D \qquad 0 \rightarrow B \tag{10a}$$

Vórtices do campo:

$$(J, \frac{\partial D}{\partial t}) \rightarrow H \qquad (-\frac{\partial B}{\partial t}) \rightarrow E \tag{10b}$$

As equações de Maxwell têm uma escrita covariante que é:

$$(M) \qquad \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \qquad \nabla . D = \rho \tag{10c}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \nabla . B = 0$$

Na formulação de Chu:
São fontes do campo:

$$(0, -\nabla . \mu_o M) \rightarrow \mu_o H \qquad (\rho, -\nabla . P) \rightarrow \varepsilon_o E \tag{11a}$$

São vórtices do campo:

$$(-\mu_o \frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial \mu_o M}{\partial t}, -\nabla \times \mu_o M \times v) \rightarrow E \tag{11b}$$

$$(J, \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t}, \frac{\partial P}{\partial t}, \nabla \times P \times v) \rightarrow H$$

Em conformidade, as equações de Maxwell escrevem-se:

$$\nabla \times H = J + \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \times P \times v \qquad \varepsilon_o \nabla . E = \rho - \nabla . P$$

$$(C) \qquad \tag{11c}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial \mu_o H}{\partial t} - \frac{\partial \mu_o M}{\partial t} - \nabla \times \mu_o M \times v \qquad \mu_o \nabla . H = -\nabla . (\mu_o M)$$

Admitiremos que esta escrita é covariante qualquer que seja a velocidade relativa ao repouso, v.

Na formulação Amperiana:
São fontes do campo:

$$(\rho, -\nabla . P, \nabla . \frac{M \times v}{c^2}) \rightarrow \varepsilon_o E \qquad 0 \rightarrow B \tag{12a}$$

São vórtices do campo:

$$(-\frac{\partial B}{\partial t}) \rightarrow E \tag{12b}$$

$$(J, \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t}, \frac{\partial P}{\partial t}, \nabla \times P \times v, \nabla \times M, -\frac{\partial}{\partial t} \frac{M \times v}{c^2}) \rightarrow \frac{B}{\mu_o}$$

Nestes termos, as equações de Maxwell escrevem-se:

$$\frac{1}{\mu_o} \nabla \times B = J + \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \times P \times v + \nabla \times M - \frac{\partial}{\partial t} \frac{M \times v}{c^2}$$

$$\varepsilon_o \nabla . E = \rho - \nabla . P + \nabla . \frac{M \times v}{c^2}$$

$$(A) \qquad \tag{12c}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla . B = 0$$

Admitiremos que esta escrita é covariante.

Na formulação de Boffi:
São fontes do campo:

$$(\rho, -\nabla P) \rightarrow \varepsilon_o E \qquad 0 \rightarrow B \tag{13a}$$

São vórtices do campo:

$$(-\frac{\partial B}{\partial t}) \rightarrow E \tag{13b}$$

$$(J, \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t}, \frac{\partial P}{\partial t}, \nabla \times M) \rightarrow \frac{B}{\mu_o}$$

Vejam-se as relações (8) entre (P,M) na formulação Amperiana e os (P,M) utilizados por Boffi.
As equações de Maxwell escrevem-se:

$$\frac{1}{\mu_o}\nabla\times B = J + \varepsilon_o\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla\times M$$

(B) (13c)

$$\varepsilon_o \nabla.E = \rho - \nabla.P$$

$$\nabla\times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla.B = 0$$

Mais uma vez se admitirá a covariância da escrita das equações de Maxwell.

5. INTERPRETAÇÃO FÍSICA DAS FONTES E VÓRTICES DOS CAMPOS

Na distribuição de Chu, e como é bem conhecido, [6],

$$\rho_P = -\nabla.P \qquad (14a)$$

traduz uma densidade volúmica correspondente a uma polarização não uniforme no espaço.
A esta polarização está ainda associada uma densidade de corrente

$$J_P = \frac{\partial P}{\partial t} \qquad (14b)$$

e uma corrente de convecção

$$J_{Pc} = \rho_P v = -v\nabla.P = \nabla\times P\times v \qquad (14c)$$

O mesmo se dirá para a distribuição de dipolos magnéticos:

$$\rho_M = -\nabla.M \qquad J_M = \frac{\partial M}{\partial t}$$

$$J_{Mc} = \rho_M v = -v\nabla.M = \nabla\times M\times v \qquad (15)$$

Na formulação Amperiana teremos, como anteriormente,

$$\rho_P = -\nabla.P \qquad J_P = \frac{\partial P}{\partial t} \qquad J_{Pc} = \nabla\times P\times v \qquad (16a)$$

Da magnetização resulta um termo devido à não uniformidade de M no espaço, [6],

$$J_M = \nabla\times M \qquad (16b)$$

e ainda

$$\rho_{MR} = \nabla.\frac{M\times v}{c^2} = -\left|\nabla.\left(-\frac{M\times v}{c^2}\right)\right| \qquad (16c)$$

o que significa uma polarização

$$P_{MR} = -\frac{M\times v}{c^2} \qquad (16d)$$

que surge e apenas se pode explicar por um efeito relativista, [6].
Se atendermos a que a corrente que circula na espira é parte de um quadrivector, imediatamente se conclui que, em movimento, uma espira, neutra no referencial de repouso, aparece com uma distribuição polarizada de carga eléctrica.
Claro está que esta polarização, além de contribuir para a densidade volúmica (16c), contribui também para a densidade de corrente

$$J_{PR} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{M\times v}{c^2} \qquad (16e)$$

Na formulação de Boffi duas considerações são feitas:
A densidade de corrente de convecção

$$\rho_P v = \nabla\times P\times v$$

define uma magnetização equivalente

$$M_P = P\times v \qquad (17a)$$

que podemos adicionar a M.
De modo idêntico a polarização

$$P_{MR} = -\frac{M\times v}{c^2} \qquad (17b)$$

se poderá adicionar a P.
Deste modo a polarização P^A e a magnetização M^A da formulação Amperiana conduzem às relações (8)

$$P^B = P^A - \frac{M^A\times v}{c^2} \qquad M^B = M^A + P^A\times v$$

o que faz desaparecer v das equações de Maxwell.

6. TRANSFORMAÇÕES DAS ENTIDADES ELECTROMAGNÉTICAS NAS DIFERENTES FORMULAÇÕES

Consideremos três referenciais de inércia, S, S' e S".
Admitiremos que a matéria está em repouso macroscópico no referencial S.
S está animado de velocidade v em relação a S'.
S" está animado de velocidade u em relação a S'.
A transformação de Lorentz;
o facto de [J, cρ] constituir um quadrivector;
a covariância, postulada, das equações de Maxwell, permitem-nos obter as leis de transformação dos campos, de S' para S" e reciprocamente.
Admitindo assim, obtém-se:

Formulação de Minkowski:

$$E'' = E'_u + \gamma(E'_t + u \times B'_t)$$
$$B'' = B'_u + \gamma(E'_t - u \times E'_t/c^2)$$

(M)

$$D'' = D'_u + \gamma(D'_t + u \times M'_t/c^2)$$
$$H'' = M'_u + \gamma(H'_t - u \times D'_t)$$

Formulação de Boffi:

E"

Idênticas às da formulação de Minkowski

B"

(B)

$$P'' = P'_u + \gamma(P'_t - u \times M'_t/c^2)$$
$$M'' = M'_u + \gamma(H'_t + u \times P'_t)$$

Formulação de Chu:

(18)

$$E'' = E'_u + \gamma(E'_t + u \times \mu_o H'_t)$$
$$H'' = H'_u + \gamma(H'_t - u \times \varepsilon_o E'_t)$$

(C)

$$P'' = P'_u + \gamma P'_t + \gamma\, u \times (v \times P')/c^2$$
$$M'' = M'_u + \gamma M'_t + \gamma\, u \times (v \times M')/c^2\ M''$$

Formulação Amperiana:

$$E'' = E'_u + \gamma(E'_t + u \times B'_t)$$
$$B'' = B'_u + \gamma(B'_t - u \times E'_t/c^2)$$

(A)

P"

Idênticas às da formulação de Chu

M"

7. OBTENÇÃO DAS RELAÇÕES ENTRE AS ENTIDADES INTERVENIENTES NAS DIVERSAS FORMULAÇÕES

No estado de repouso as entidades com a mesma designação coincidem ou relacionam-se por:

$$D = \varepsilon_o E + P \qquad B = \mu_o (H + M) \qquad (19)$$

No caso anterior podemos fazer coincidir S com S" de onde resulta u = v.
S" será então o referencial onde a matéria está em repouso macroscópico.
Os campos em S" são assim idênticos em todas as formulações ou correspondem-se através de (19).
Nas relações (18) faremos, então, u = v e em seguida substitui-se v por (-v) a fim de representar F' em função de F".
Os campos F" serão todos indicados pelo mesmo símbolo.
Os campos F' designam-se por F^M, F^C, F^A ou F^B consoante se trate da formulação de Minkowski, de Chu, Amperiana ou de Boffi.
Assim procedendo obtém-se:

$$E^M = E_v + \gamma(E_t - v \times B_t)$$
$$B^M = B_v + \gamma(B_t + v \times E_t/c^2)$$
$$D^M = D_v + \gamma(D_t - v \times H_t/c^2)$$
$$H^M = H_v + \gamma(H_t + v \times D_t)$$
$$E^B = E_v + \gamma(E_t - v \times B_t)$$
$$B^B = B_v + \gamma(B_t + v \times E_t/c^2)$$
$$P^B = P_v + \gamma(P_t + v \times M_t)$$
$$M^B = M_v + \gamma(M_t - v \times P_t)$$

(20)

$$E^C = E_v + \gamma(E_t - v \times \mu_o H_t)$$
$$H^C = H_v + \gamma(H_t + v \times \varepsilon_o E_t)$$
$$P^C = P_v + \gamma P^t$$
$$M^C = M_v + \gamma M_t$$
$$E^A = E_v + \gamma(E_t - v \times B_t)$$
$$B^A = B_v + \gamma(B_t + v \times E_t/c^2)$$
$$P^A = P_v + \gamma P^t$$
$$M^A = M_v + \gamma M_t$$

De (20) facilmente se obtém o seguinte quadro de equivalências:

EDBH Minkowski	EPBM Boffi
E^M	E^B
D^M	$\varepsilon_o E^B + P^B$
B^M	B^B
H^M	$B^B / \mu_o - M^B$

EPHMv Chu	EPBM Amperiana
$E^c - v \times \mu_o M^c$	E^A
$\varepsilon_o E^c + P^c$	$\varepsilon_o E^A + P^A + v \times M^A / c^2$
$\mu_o (H^c + M^c)$	B^A
$H^c + v \times P^c$	$B^A / \mu_o - M^A - v \times P^A$

Como Tai salienta, [3], [7], no trabalho de Fano, Chu e Adler (1960); ($E^c + \mu_o$ v x H^c) e ($H^c - \varepsilon_o$ v x E^c) são introduzidas e postuladas como sendo as forças associadas às cargas unitárias, eléctrica e magnética. Mas do quadro de equivalências resulta facilmente:

$$E^M + v \times B^M = E^c + \mu_o v \times H^c$$

$$H^M - v \times D^M = H^c - \varepsilon_o v \times E^c \qquad (21)$$

e então compreende-se bem que a força resultante é a mesma em qualquer das teorias, a de Minkowski e a de Chu.
Este um aspecto interessante e muitos outros se poderiam considerar. A conclusão é sempre a mesma: as formulações são equivalentes.

8. SOBRE O MÉTODO UTILIZADO

O método utilizado consistiu em admitir que as equações de Maxwell dizem sempre o mesmo na relação que estabelecem entre o campo e as fontes e os vórtices desse campo que será [E,B] ou [D,H].
As fontes contribuem para a divergência dos campos e os vórtices para os rotacionais.
Nas formulações que não as de Minkowski, as fontes e vórtices unem-se formalmente, em todos os efeitos físicos previstos, a ρ e J e, bem assim, às densidades de correntes de deslocamento.
Então, os campos calculam-se utilizando a electrodinâmica no vácuo: é como se todo o espaço do meio material se convertesse no vácuo de parâmetros constitutivos [μ_o, ε_o] e nesse vácuo existissem, de facto, as distribuições de carga e de corrente (as verdadeiras e as equivalentes).
Foi esta atitude que nos permitiu escrever imediatamente na Secção-4 as equações de Maxwell.
Para que haja consistência é necessário que, na base do quadro de equivalências estabelecido, as equações de Maxwell escritas numa dada formulação resultem das equações de Maxwell escritas nas outras formulações.
Consideremos então as equações de Maxwell na formulação de Minkowski:

$$\nabla \times H^M = J + \frac{\partial D^M}{\partial t} \qquad \nabla . D^M = \rho$$

$$\nabla \times E^M = -\frac{\partial B^M}{\partial t} \qquad \nabla . B^M = 0 \qquad (22)$$

Se utilizarmos, por exemplo, a formulação de Chu obtém-se das equivalências estabelecidas:

$$\nabla \times (E^c - v \times \mu_o M^c) = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_o (H^c + M^c) \qquad \nabla . (\varepsilon_o E^c + P^c) = \rho$$

$$\nabla \times (H^c + v \times P_c) = J + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_o E^c + P^c) \qquad \nabla . \mu_o (H^c + M^c) = 0 \qquad (23)$$

Mas estas são exactamente as equações obtidas por Fano, Chu e Adler (1960) e facilmente se convertem nas equações (11c) escritas na Secção 4 relativamente à formulação de Chu.
O mesmo se passa com todas as outras formulações.

9. CONCLUSÕES

- Demonstrámos a equivalência formal das formulações da electrodinâmica dos meios materiais em movimento.
- Diferença física, para se evidenciar, exige experiência em meios materiais em movimento onde é difícil ou até impossível medir os campos.

Esta a argumentação que normalmente se levanta.
Mas, como se verificou, nas "forças de Lorentz" intervêm os campos [E^M, B^M] ou [E^c, H^c], (formulação de Minkowski e formulação de Chu).
Desde que a medição de um campo envolva um efeito mecânico é natural que seja difícil dizer se existe uma formulação mais correcta do que as outras.
- No trabalho apresentado, obtivemos exactamente os resultados já anunciados por Tai [3, 4] e por Penfield e Haus [5].

No entanto, o método que se seguiu é diferente. Por exemplo, Tai, consegue a equivalência das equações de Maxwell do que se segue o quadro de equivalências.
Nós, escrevemos imediatamente as equações e, em seguida, utilizando as transformações que garantem a covariância das equações de Maxwell e o facto de em repouso os campos coincidirem nas diversas formulações, obtivemos o quadro de equivalência.
Depois, a partir desse quadro, mostramos que as equações de Maxwell, nas diversas formulações,

podem deduzir-se umas das outras. Nisto consiste a originalidade deste trabalho.
No que respeita a Penfield e Haus as metodologias também são essencialmente diversas. Trata-se da obra que mais informação contém sobre a Electrodinâmica dos Meios em Movimento. Salienta-se isto para eventual consulta.
- Note-se, isso é importante, que os efeitos relativistas evidenciados na Secção 5, relações (16c) e (16e) conjugados com a equivalência de todas as formulações evidenciam bem que as equações de Maxwell são essencialmente relativistas.
- Finalmente pode perguntar-se: qual a melhor formulação?
Em face do exposto, é talvez uma pergunta sem sentido.
A de Minkowski foi a primeira e é formalmente a mais simples e elegante e isso afigura-se-nos importante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Einstein, A., (1905). Zur elecktrodynamic bewegter Körper, *Ann. d. Phys.*, **17**.
[2] Sommerfeld, A., (1966). *Electrodynamics*, Academic Press, New York.
[3] Tai, C.T., (1967). Present Views on Electrodynamics of Moving Media, *Radio Science*, **Vol. 2 (New series)**, nº 2, February.
[4] Tai, C.T., (1964). A Study of Electrodynamics of Moving Media, *Proceedings of the IEEE*, **52**, nº 6.
[5] Penfield, P. and Haus, H.A., (1967). Electrodynamics of Moving Media, *Research Monograph, nº 40*, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.
[6] Panofsky, W.K.H. and Philips, M., (1969). *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.
[7] Tai, C.T., (1965). Comments on the Lorentz force, *Proc. IEEE*, **53**.

POTÊNCIA E ATENUAÇÃO EM GUIAS DE ONDA

João Luis Sobrinho

Estudante do Ramo de Telecomunicações e Electrónica, D.E.E.C. , I.S.T.

SUMÁRIO

Neste trabalho, o autor analisa de uma forma simples e original, julgamos, a expressão da potência num guia de ondas, associada a modos TM ou TE, quando expressa na componente longitudinal do campo. A argumentação utilizada permite ir além, esclarecendo sobre o comportamento assimptótico da constante de atenuação, dos referidos modos, quando a frequência tende para infinito.

ABSTRACT

In this work, the author analyses in a simple and original way the formula representing the power in a waveguide, associated with TM or TE modes, when expressed on the axial component of the field. The line of reasoning used makes it possible to predict the asymptotic behaviour of the attenuation constant, as the frequency approaches infinity.

1 - INTRODUÇÃO

A determinação da potência (P) e atenuação (α), aproximação de primeira ordem, num guia de ondas envolve, para cada modo de propagação, o cálculo de integrais da forma:

$$P = \frac{1}{2}\int_{S_T}\left(\mathbf{E}^T \times \mathbf{H}^{T*}\right)\cdot \mathbf{e}_z \, dS_T$$

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2} R_P \int_C \mathbf{H}^P \cdot \mathbf{H}^{P*} ds}{2P}$$

As expressões obtidas são exaustivas mas não evidenciam o comportamento em frequência de P e α.

No presente trabalho mostra-se que, a partir de propriedades gerais do campo electromagnético num guia de ondas, se pode de imediato prever a evolução de P e α com a frequência. As conclusões a que se chega são independentes da geometria da secção transversal do guia.
A figura 1 esclarece o significado dos símbolos intervenientes no texto.

2 - CAMPOS DOS MODOS TM E TE

Muito sumariamente pode dizer-se que as propriedades gerais dos campos, num guia de ondas, se consubstanciam nas relações que abaixo se escrevem para uso ulterior (consultar qualquer livro sobre guias de onda, por exemplo Propagação Guiada do Prof. Abreu Faro).

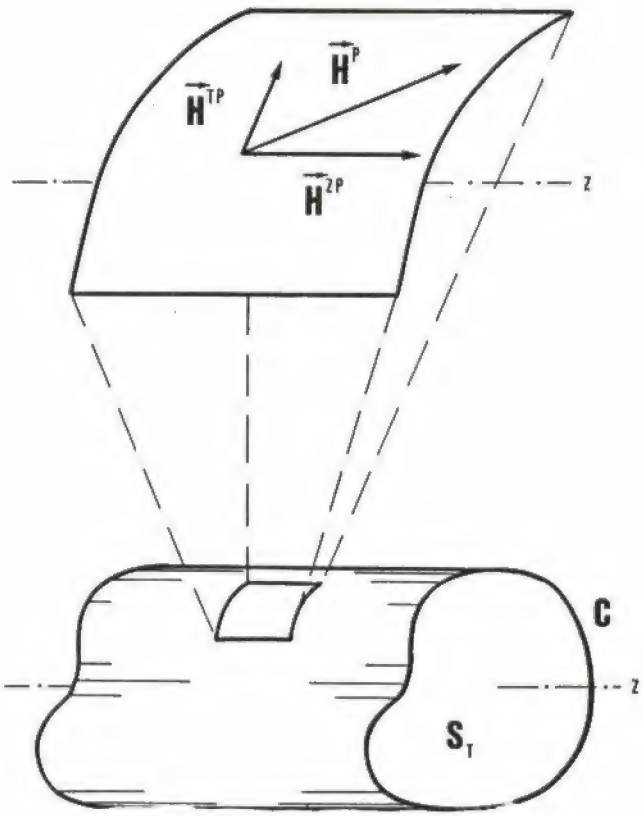

figura 1

Modos TM

Ia) A resolução do problema de Dirichlet

$$\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \qquad 1\,a)$$

$$\left(E_z = 0\right)_C \qquad 2\,a)$$

conduz a E_z.

IIa) As componentes transversais dos campos são dadas por:

$$\mathbf{E}^T = -j\left(\frac{k_z}{k_c}\right)\frac{\nabla_t E_z}{k_c} \qquad 3\,a)$$

$$\mathbf{H}^T = j\left(\frac{k_m}{k_c}\right)\frac{\nabla_t E_z \times \mathbf{e}_z}{k_c Z_m} = -\frac{1}{Z_{TM}}\mathbf{E}^T \times \mathbf{e}_z \qquad 4\,a)$$

Modos TE

Ib) A resolução do problema de Von Neumann

$$\nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \qquad 1\,b)$$

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0\right)_C \qquad 2\,b)$$

conduz a H_z.

IIb) As componentes transversais dos campos são dadas por:

$$\mathbf{H}^T = -j\left(\frac{k_z}{k_c}\right)\frac{\nabla_t H_z}{k_c} \qquad 3\,b)$$

$$\mathbf{E}^T = -j\left(\frac{k_m}{k_c}\right)\frac{\nabla_t H_z \times \mathbf{e}_z}{k_c} Z_m = Z_{TE}\mathbf{H}^T \times \mathbf{e}_z \qquad 4\,b)$$

em que k_m e Z_m são, respectivamente, a constante de propagação e a impedância característica de onda do meio no interior do guia, que se admite sem perdas ($\sigma_m = 0$).

1b), 3b) e 4b) são equações duais de 1a),3a) e 4a) o que justifica por estas derivarem, e apenas, das equações de Maxwell na ausência de fontes. Note-se que não estão envolvidas as equações 2a) e 2b) que traduzem condições fronteira em superfícies condutoras perfeitas.

3 - POTÊNCIA

É bem conhecida a fórmula da potência, associada a modos TM ou TE, expressa na componente longitudinal do campo:

Modos TM

$$P = \frac{1}{2}\frac{1}{Z_m}\left(\frac{f}{f_c}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}\int_{S_T} E_z E_z^* \, dS_T \qquad 5\,a)$$

Modos TE

$$P = \frac{1}{2}Z_m\left(\frac{f}{f_c}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}\int_{S_T} H_z H_z^* \, dS_T \qquad 5\,b)$$

em que f_c é a frequência crítica do modo de propagação que se considere.
Como se mostrará estas expressões são fáceis de apreender. Evidenciar este facto é o primeiro objectivo do trabalho.
Verifica-se de IIa) e IIb) que, para cada solução do problema de Dirichlet, modos TM, ou do problema de Von Neumann, modos TE, as componentes transversais do campo crescem com a frequência. A componente transversal de nome contrário ao da componente longitudinal, isto é $\mathbf{H}^T$ nos modos TM e $\mathbf{E}^T$ nos modos TE, varia com

$$\left(\frac{k_m}{k_c}\right) = \left(\frac{f}{f_c}\right)$$

A componente transversal do mesmo nome da componente longitudinal, isto é $\mathbf{E}^T$ nos modos TM e $\mathbf{H}^T$ nos modos TE varia com

$$\left(\frac{k_z}{k_c}\right) = \left(\frac{k_m}{k_c}\right)\sqrt{1-\left(\frac{k_c}{k_m}\right)^2} = \left(\frac{f}{f_c}\right)\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

A potência, dada de um modo geral por

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\int_{S_T}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\cdot\mathbf{e}_z\,dS_T\right\} = \frac{1}{2}\int_{S_T}(\mathbf{E}^T\times\mathbf{H}^{T*})\cdot\mathbf{e}_z\,dS_T$$

é proporcional ao produto das componentes transversais do campo. Vimos como cada uma destas evoluía com a frequência. Podemos então escrever

$$P \propto \left(\frac{f}{f_c}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \qquad 6)$$

A relação anterior foi estabelecida para cada solução de Ia) ou Ib). Não é portanto estranho que na fórmula da potência apareça, a multiplicar, um integral envolvendo a componente longitudinal do campo. Este integral depende da geometria da secção transversal do guia. Finalmente o factor $1/Z_m$, modos TM, ou Z_m, modos TE, é necessário para que as expressões 5 a) e 5 b) fiquem dimensionalmente correctas.

4 - ATENUAÇÃO

A cada modo de propagação está associado uma constante de atenuação, α, que caracteriza as perdas de potência nas paredes condutoras do guia (aproximação de primeira ordem). Como se sabe α é dado por:

$$\alpha = \frac{P_p}{2P} \qquad 7)$$

em que:

$$P_p = \frac{1}{2} R_p \int_C \mathbf{H}^P \cdot \mathbf{H}^{P*} ds \qquad 8)$$

$$P = \frac{1}{2} \int_{S_T} (\mathbf{E}^T \times \mathbf{H}^{T*}) \cdot \mathbf{e}_z \, dS_T \qquad 9)$$

R_p é a parte real da impedância característica de onda das paredes metálicas. Recorda-se, desde já, que $R_p \propto \sqrt{f/f_c}$.

Na secção anterior estudou-se a dependência do denominador de 7) com a frequência. A mesma atitude para com o numerador permite prever o comportamento assimptótico da constante de atenuação quando f tende para infinito.

Modos TM

Nestes modos, por definição, $\mathbf{H}^{ZP} = 0$ ao longo do contorno C. Por outro lado $\mathbf{H}^{TP} \neq 0$ em C. (O autor não conhece uma demonstração da universalidade desta condição).

A potência de perdas na parede é dada por:

$$P_p = \frac{1}{2} R_p \int_C \mathbf{H}^{TP} \cdot \mathbf{H}^{TP*} ds \qquad 10\ a)$$

Atendendo a 4 a) é fácil verificar que:

$$P_p \propto \left(\frac{k_m}{k_c}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)} = \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)} \qquad 11\ a)$$

Conjugando 6) e 11 a) conclui-se que, nos modos TM, a constante de atenuação torna-se proporcional a $\sqrt{f/f_c}$ quando f tende para infinito.

Modos TE

Nestes modos $\mathbf{H}^{ZP} \neq 0$ no contorno C.

Se $\mathbf{H}^{TP} = 0$, ao longo de C, então a potência de perdas nas paredes é dada por:

$$P_p = \frac{1}{2} R_p \int_C \mathbf{H}^{ZP} \cdot \mathbf{H}^{ZP*} ds \qquad 10\ b)$$

Constata-se que:

$$P_p \propto \sqrt{\frac{f}{f_c}} \qquad 11\ b)$$

Conjugando 6) e 11 b) conclui-se que a constante de atenuação tende para zero quando f tende para infinito. Um exemplo deste caso, são os modos TE_{on} nos guias de secção circular.

Se, por outro lado, $\mathbf{H}^{TP} \neq 0$ em, pelo menos, um troço de C, então a 10 b) temos de adicionar o termo:

$$\frac{1}{2} R_p \int_C \mathbf{H}^{TP} \cdot \mathbf{H}^{TP*} ds$$

Este, por 3 b), evolui com:

$$\left(\frac{k_z}{k_c}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)} = \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \left|1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right| \sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)}$$

o que torna a constante de atenuação proporcional a $\sqrt{f/f_c}$ quando f tende para infinito.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Abreu Faro o encorajamento e revisão do texto.

EFFECT OF CURRENT ON GOLD ELECTROWINNING WITH A FLUIDIZED BED ELECTRODE

C.A.C. Sequeira* and F.D.S. Marques

Department of Metallurgical Engineering, South Dakota School of Mines and Technology, Rapid City, SD 57701, U.S.A.

*Present address: Department of Chemical Engineering, Instituto Superior Técnico, Technical University of Lisbon, Portugal.

ABSTRACT

Electrowinning of gold from caustic cyanide solutions made to simulate carbon column strip solutions was studied using a laboratory size side-by-side fluidized bed electrode (FBE). The variable considered was the current through the cell. The results show that there are three competing cathodic reactions: gold deposition, oxygen reduction and hydrogen production. Oxygen reduction occurs because dissolved oxygen comes from the anode where it is produced. It is most significant at low currents. Hydrogen production occurs when the concentration of gold is low enough or the current is high enough that the gold diffusion limiting current is attained or nearly attained.

INTRODUCTION

Interest in gold production has risen substantially in the last few years. This is due to its relatively high price on the market while those of other metals remain low. Many medium and small size gold mining and milling facilities have opened in the past ten years. Most of the new plants use carbon adsorption techniques for purification and concentration of leach solutions. After the carbon is loaded with gold, it is stripped with a hot caustic cyanide solution. The gold in the resultant solution can either be electrowon or precipitated by cementation using zinc dust. The latter process is known as the Merrill-Crowe process. Because there is no need for deaeration or clarification of the solution with electrowinning, as with the Merrill-Crowe process, electrowinning is now a common procedure for recovering gold from strip solutions. Also there is interest recently in electrowinning of very dilute leach solutions.

The same basic types of electrolytic cells have been used for the past 30 years to commercially electrowin gold from carbon strip solutions i. e., steel wool packed bed electodes. New electrowinning cells have been developed which can effectively electrowin gold from dilute solutions. The fluidized bed electrode (FBE) is one of these cells and it has been extensively tested since its invention in 1966. It has been tried for electrowinning of copper, nickel, zinc and other metals. These studies show that the fluidized bed electrode performs well in the electrowinning of metals from dilute solutions.

One reason for the good performance of the fluidized bed electrode is that with a particulate cathode there is a high surface area which means metals can be won from dilute solutions at a low actual current density in a relatively small cell. Another advantage is the high turbulence in the bed due to fluidization. This and particle collision lead to a lowering of the diffusion layer thickness which correspondingly increases the limiting current for electrowinning.

The goal of this study is to look at the reactions and other parameters involved in the electrowinning of gold from cyanide solutions with a fluidized bed electrode. In particular, the effect of current through the FBE cell is reported in this paper.

EXPERIMENTAL

The fluidized bed electrode used in this study is the side by side type of cell arrangement and is the same type used in most recent investigations of the FBE [1-4]. The cell was made from welded polypropylene and had a fluidized cathode of conducting particles. These particles were relatively spherical copper shot, 20x30 mesh, U.S. series. They were electroplated with gold and, therefore, behaved electrochemically like gold. The cathode had a volume of 50 cm^3 when fluidized and contained 280 gm of gold coated copper particles which had an approximate surface area of 2700 cm2. The same particles were used for all experiments with the FBE since the diameter of the particles changed only about 2% total for all experiments combined. The bed was fluidized by flow of

electrolyte up through the cathode. A 100 mesh, U.S. series, stainless steel screen was used as the cathode feeder electrode and was placed opposite the diaphragm in the cathode compartment. It was about the same size as the diaphragm.

The anode and cathode compartments were separated from each other with a polypropylene cloth diaphragm. A small portion of the electrolyte flowed from the cathode through the diaphragm to the anode compartment to form the anolyte. This electrolyte returned to the electrolyte from the cathode compartment at the top of the cell, and this mixed stream then entered a 2 ℓ reservoir. The anode was made of stainless steel mesh and was flush against the diaphragm. There was no oxidation of the anode.

In addition to the FBE cell, a two liter reservoir, a hot water bath, a power supply, a corrosion resistant pump, and two multimeters, were used in the experimental set-up.

All solutions were made from doubly distilled water and reagent grade $KAu(CN)_2 \cdot 2H_2O$, NaOH (1.0%) and NaCN (0.1%). The mixed electrolyte was placed in the two liter holding flask which was then put into the hot water bath. Once the solution reached the desired temperature it was sparged with nitrogen for two minutes to remove excess oxygen. Flow of electrolyte to the cell was initiated and adjusted to obtain proper fluidization (FBE) or flowrate.

Samples of the electrolyte were taken at the same time that power to the cell was provided. Two samples were taken every 1.5 minutes thereafter, one from the holding flask and one from the top of the cell. The samples were analyzed for gold content using an Instruments Laboratory 351 Atomic Absorption Spectrophotometer. Each experiment was run until the solution was depleted to less than 1 ppm of gold.Power was applied galvanostatically and the cell voltage was recorded with every sample taken.

Concentration analysis of the samples from the holding flask as a function of time was used to construct a plot of gold concentration vs. time, Figure 1, and the slope of this plot was used to calculate the current efficiency (CE) for gold deposition using the equation:

$$CE(\%) = 100(FV/A_{Au}I)d[Au]/dt = 0.8166(V/I)d[Au]/dt \quad (1)$$

where d[Au] / dt is the slope of the gold concentration vs. time plot in ppm/min, V is the volume of the solution in liters, I is the current, F is the Faraday constant and A_{Au} is the atomic weight of gold.

Power consumption (PC) was also calculated using the cell voltage (E) with the equation:

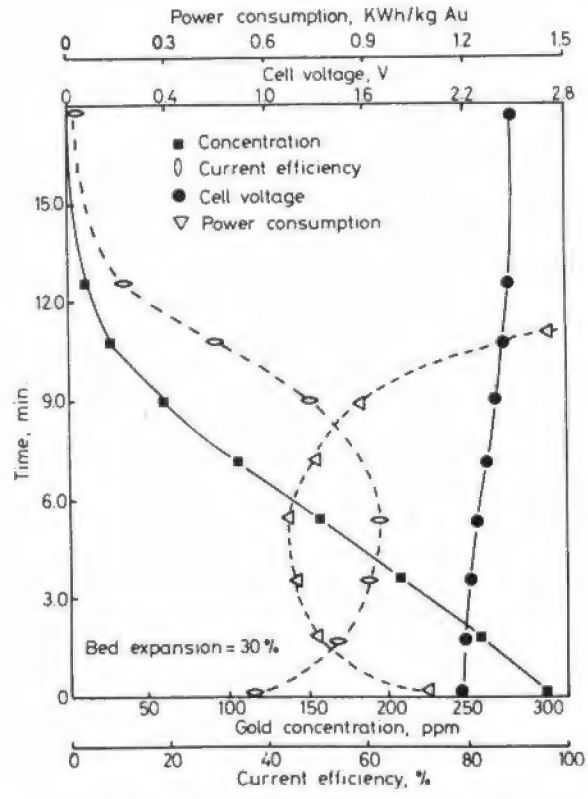

Fig. 1 Plot of raw data and calculated values as a function of time.

$$PC(kWh/kg\ Au) = 8.333EI/(d[Au]/dt) \quad (2)$$

Both current efficiency and power consumption were calculated for every time interval that a sample was taken.

The parameter varied in this study was the cell current, 0.2A to 2.0A i.e., 100 to 1,000 A/m^2 superficial current density for the FBE. The solution concentration and temperature were chosen to simulate commercial carbon column strip solutions.

RESULTS AND DISCUSSION

Raw data from each experiment was plotted in the format typified in Figure 1. The gold concentration vs. time curve is plotted from the analysis of samples taken from the 2 liter reservoir during the experiment. Cell voltage was measured to obtain the voltage vs. time curve. Calculated values of current efficiency and power consumption, using equations 1 and 2, are also shown. The current efficiency initially increases due to equilibration of the entire system. Once equilibrium is reached the current efficiency starts to decrease as time proceeds. This is due to depletion of gold which also increases cell voltage.

Gold Electrowinning Reactions

In the caustic auro-cyanide system there are three basic reactions which occur at the cathode and

compete for the current. These reactions have been noted by others [5,6]. The most important and essential cathodic reaction is the plating of gold:

$$Au(CN)^-_2 + e^- = Au + 2CN^- \quad (3)$$

The other two reactions, which reduce current efficiency, are evolution of hydrogen and reduction of oxygen:

$$H_2O + e = 1/2H_2 + OH \quad (4)$$

$$1/2O_2 + H_2O + 2e = 2OH^- \quad (5)$$

The predominant anodic reaction is the production of oxygen. This reaction provides the oxygen for reaction 5:

$$2OH^- = 1/2O_2 + H_2O + 2e^- \quad (6)$$

This oxygen does not permeate the membrane into the cathode but rather is circulated through the 2 liter reservoir to the cathode because of electrolyte recycle. Another anodic reaction of small magnitude is oxidation of the cyanide ion:

$$2OH^- + CN^- = CNO^- + H_2O + 2e^- \quad (7)$$

A minor reaction that takes place in the bulk solution is oxidation of the cyanide ion by dissolved oxigen:

$$1/2O_2 + CN^- = CNO^- \quad (8)$$

Since reactions 3, 4 and 5 constitute all cathodic reactions, the current eficiency, CE, is given by

$$CE(\%) = 100I_{Au}/(I_{Au} + I_H + I_O) \quad (9)$$

where I_{Au}, I_H, and I_O are the cathodic currents of reactions 3, 4 and 5, respectively.

At the conditions of these tests (pH = 12.5 and 80°C), the approximate Nernst potentials, Er, for the three respective cathodic half reactions, 3-5, with respect to the standard hydrogen electrode are as follows:

$$Au(CN)^-_2/Au{:}Er = -0.60 + 0.070 \log [Au(CN)^-_2] / [CN^{-2}] = 0.60V \text{ at } 100 \text{ ppm} \quad (10)$$

$$H_2O/H_2{:}\ Er = -0.874V \quad (11)$$

$$O_2/OH^-{:}\ Er = 0.355 + 0.0174 \log P_{O_2} = 0.33V \quad (12)$$

The concentration dependent term of equation 12 was evaluated by measuring the concentration of dissolved oxygen entering the cell, 1.6 ppm, and comparing it with the saturation level in equilibrium with oxygen gas, 21 ppm.

Current Efficiency

The effect of current efficiency and power consumption is shown in Table 1. Power consumption will be discussed later. There are two features that stand out in the current efficiency curves and they are: 1) a pronounced maximum at 0.8A, i.e., 400 A/m^2 for the FBE; and 2) increase in current efficiency with increased gold concentration. Since the current efficiency is given by Equation 9, it is necessary to consider all three cathodic reactions involved, I_{Au}, I_H, and I_O in terms of their respective currents to interpret data presented in Table 1.

To better understand this, consider first two polarization curves for the cathode. The potential of the cathode was measured with respect to a standard calomel electrode by placing a Luggin capillary filled with electrolyte at the outer edge of the cathode near the diaphragm. These measurements, shown in Figure 2 are for solution with no gold (more negative curves) and solutions which contained greater than 100 ppm of gold. Reactions 4 and 5, hydrogen evolution and oxygen reduction, are responsible for the shape of the curves with no gold. At low currents oxygen reduction consumes almost all of the current. When the current is at 0.25A i.e., approximately -1.24V (SCE), oxygen reduction I_O, is at or near its limiting current, which can be seen by the change in the shape of these curves.The concentration of dissolved oxygen was measured to be 1.3 to 2.0 ppm. If all of the oxygen were consumed at the standard flow rate, 1.35 l/min, it would amount to a current of 0.35 to 0.5A. Therefore, a limiting oxygen current of 0.25A is of proper magnitude. Above about 0.25A (-1.24V) hydrogen starts to evolve, I_H, and consumes almost all additional current.

With gold present the shape of the previous curve of Figure 2 changes.

When the cathode has a potential above (less negative than) -1.1V (SCE) reduction of gold and oxygen occurs. At potentials more negative than about -1.1V, all three reactions take place simultaneously and compete for the current. An interesting point to note with the polarization curvesis that because of the variation of potential within three dimensional cathodes there are no well defined Tafel slopes and there is mixing of the different regions of the curves which causes the regional definition to be smoothed out.

From the results of the polarization curves it is possible to explain the variation of the current efficiency vs. current, Table 1. At low current, left of the peak, the cathode is in the region of oxygen reduction and gold deposition. Since oxygen reduction has a limiting current of 0.25 to 0.3A and also has a slightly positive Er as compared to the negative Er for the $Au(CN)_2/Au$ couple (see

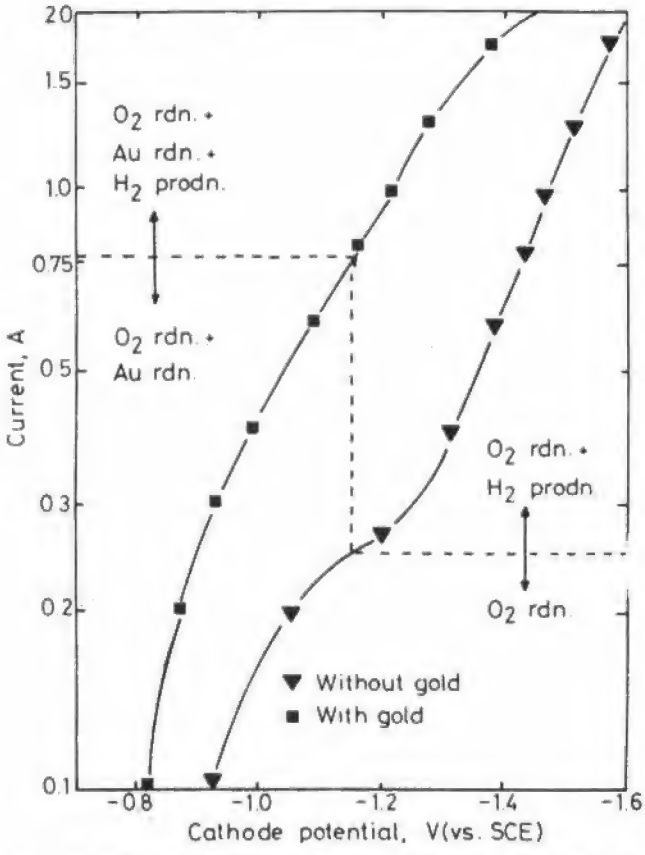

Fig. 2 - Cathodic polarization curves for solutions with gold and solutions with no gold.

equations 9 and 11), the O_2/OH^- couple will attain its limiting current before gold deposition starts to take place i.e., low current efficiency for gold. But gold deposition increases with increasingly negative potential, while oxygen reduction stays at its same rate (its limiting current). Therefore, as total current increases there will be an increase in current efficiency as I_{Au} increases relative to I_O.

The polarization curves also show that hydrogen starts to evolve at just below the peak current of 0.8A or 400A/m² for the FBE (Table 1), while on the other hand, gold deposition reaches near its limiting current. As the potential becomes more negative hydrogen evolution, I_H, increases while both I_{Au} and I_O stay the same which causes the decrease in the current efficiency to the right of the peak.

The effect of I_O and I_H can be seen better if the data in Table 1 are plotted as gold current, I_{Au}, vs. total current,I, (gold current = total current x CE). This is done in Figure 3 that shows that gold reaches its limiting current at low gold concentration.

At higher gold concentrations gold deposition does not quite reach its limiting current i.e., I_{Au} is still increasing with increasing I. At very low currents no H_2 is produced as previously explained and oxygen consumes 100% of the current. Figure 4 clarifies this and shows how the cathodic current is broken up into

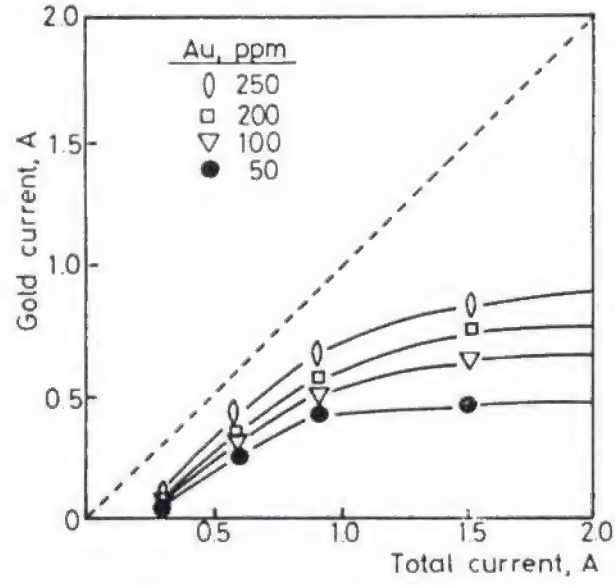

Fig. 3 - Gold current as a function of total current at different gold concentrations.

the three currents I_{Au}, I_H and I_O for the FBE at high gold concentration.

Another feature of the data on current efficiency vs. current, Table 1, is the increase in current efficiency with increased gold concentration. This occurs because at low gold concentrations there is mass transfer control of gold plating and mass transfer control depends on the gold concentration.

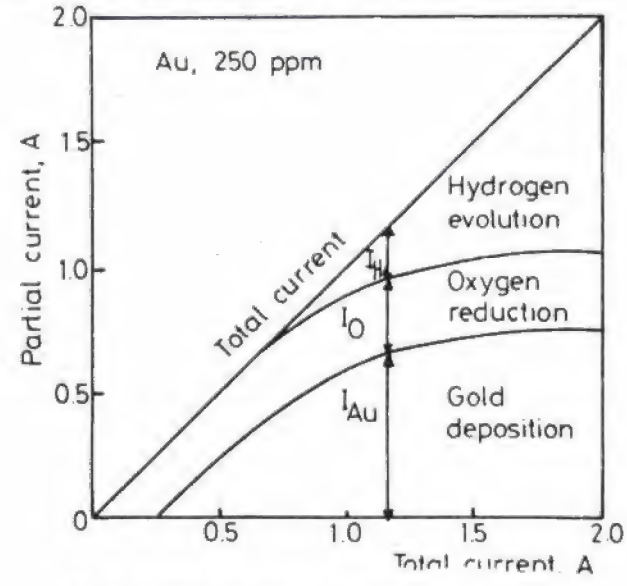

Fig. 4 - Partial currents as a function of total current.

Power Consumption

The power consumption data of Table 1 reflect mostly the trend of current efficiency (compare equations 1 and 2) since the voltage increased relatively little with increasing current i. e., from about 1.5V to 2.5V.

CONCLUSIONS

The following conclusions have been drawn from the data:

1. Hydrogen evolution in the electrowinning of gold occurs when the concentration of gold is low enough or the current is high enough that the limiting gold diffusion current, I_{Au}, is attained or nearly attained.

2. Dissolved oxygen consumes almost its full theoretical possible current (limiting current) in all experiments because of the high overpotential for oxygen reduction (equation 11) which is always attained in operation. This effect is seen most clearly in experiments with low current.

3. A high electrolyte conductivity is needed to maintain a relatively high current efficiency in the FBE.

It is clear that further evaluation of the cell is required, being necessary to study the effect of parameters like NaOH and NaCN concentrations, temperature of operation, flow rate, bed expansion, etc., so that optimised working conditions can be established for the electrowinning of gold with a fluidised bed electrode. These aspects will be treated in a future publication.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors wish to thank NATO Scientific Affairs Division and the Department of Metallurgical Engineering for financial support and research facilities.

REFERENCES

1. Masterson, I. F. and Evans, J. W. (1982). *Metall. Trans. B*, **13**: 3-13.
2. LeRoy, R. L. (1978). *Electrochim. Acta*, **23**: 827-834.
3. Jiricny, V. and Evan, J. W. (1984). *Proceedings of the Symposium on Electrochemistry in Mineral and Metal Processing*, Richardson, P. E., Ed.: The Electrochemical Society, Pennington, New Jersey.
4. Flett, D. S. (1972). *Chem. Ind.*, **24**: 983-988.
5. Paul, R. L., Filmer, A. O., and Nicol, M. J. (1983). *Hydrometallurgy Research, Development and Plant Practice*, Osseo-Asare, K. and Miller, J. D., Ed: TMS-AIME, New York: 689-702.
6. Filmer, A. O. (1982). *Carbon-in-Pulp Technology for the Extraction of Gold*, Aus. I. M. M. Parkville, Victoria, Australia: 49-66.

Superficial Current Density, A/m²	Current Efficiency, %			Power Consumption, KWh/Kg Au		
	200 ppm Au	100 ppm Au	50 ppm Au	200 ppm Au	100 ppm Au	50 ppm Au
100	26.1	20.3	18.3	0.82	0.96	1.06
200	54.3	49.4	40.1	0.45	0.51	0.63
400	60.1	56.0	47.4	0.46	0.50	0.60
700	48.2	40.9	29.0	0.68	0.81	1.13
1,000	31.4	27.8	17.8	1.27	1.45	2.26

Table 1 - Current efficiency and power consumption as a function of superficial current density

MODELAÇÃO FÍSICO-MATEMÁTICA DOS FENÓMENOS OCORRENTES DENTRO DE CÂMARAS DE COMBUSTÃO

Maria da Graça Carvalho

Professora Associada com Agregação, Departamento de Engenharia Mecânica,

Instituto Superior Técnico, investigadora do CTAMFUTL

RESUMO

Este artigo descreve o trabalho de modelação física e matemática e simulação numérica dos fenómenos ocorrentes dentro de câmaras de combustão desenvolvido no Departamento de Engenharia Mecânica do Instituto Superior Técnico. Os modelos físicos de turbulência, combustão, radiação e emissão de poluentes são descritos. O modelo matemático é constituído por um sistema de equações, diferenciais, não lineares às derivadas parciais, cuja solução passa pela discretização dessas equações, conduzindo a equações às diferenças finitas. O algoritmo foi aplicado ao cálculo de diferentes situações reais sendo apresentados os resultados numa demonstração das potencialidades do algoritmo.

ABSTRACT

The present paper describes the work on mathematical modelling and computer simulation of the flow, heat transfer and combustion precesses in three-dimensional combustion chambers developed at the Mechanical Engineering Department of Instituto Superior Técnico. The physical models of turbulence, combustion, radiation and pollutant emissions are described. The mathematical model involves the solution of a set of partial differential. equations which are discretized using a finite difference technique. The algorithm was applied to several industrial situations and has proved to be an important tool for the furnace and boiler engineer designer.

1. INTRODUÇÃO

1.1 O Problema em Estudo

No passado, o conhecimento empírico acumulado ao longo de dezenas de anos, juntamente com modelos teóricos aplicados na forma de balanços globais, determinaram a forma como era feito o projecto de câmaras de combustão e a procura das suas condições de funcionamento optimizadas.

Apesar do desconhecimento da distribuição espacial das propriedades relevantes no interior das câmaras de combustão (i.e. velocidades, temperaturas, fluxos de calor e concentrações das espécies químicas), o seu funcionamento revelou-se economicamente eficiente até ao início da crise petrolífera. Contudo, a consciência da escassez das fontes de energia, o aumento do preço dos combustíveis e a legislação restritiva à emissão de poluentes libertados na combustão levaram ao aprofundamento do estudo dos fenómenos ocorrentes nos sistemas de combustão atrás referidos.

A simulação experimental em modelo real de novas câmaras de combustão é impensável devido aos seus proibitivos custos, ou mesmo, o estudo empírico de modificações na geometria de câmaras existentes, restando por conseguinte, a única alternativa viável: a modelação numérica de câmaras de combustão reais. A simulação em computador, através de um algoritmo de cálculo de uma câmara real que hoje é possivel, resultou da conjunção de esforços na modelação de fenómenos, tais como escoamentos turbulentos com ou sem reacção química e processos de transferência de calor. A resolução destes modelos matemáticos foi possível à custa dos avanços na análise numérica. O desenvolvimento nestas áreas, conjuntamente com o advento dos grandes computadores digitais, tornaram possível a solução de grande parte dos fenómenos práticos no domínio de Mecânica dos Fluidos, da Transferência de Calor e da Combustão. É hoje possível obter detalhes por exemplo, do escoamento e transferência de calor dentro de caldeiras , de câmaras de combustão de turbinas de gás ou de fornos industriais.

1.2 Revisão Bibliográfica

A simulação numérica de câmaras de combustão tri-dimensionais foi iniciada por Patankar and Spalding [1,2]. Nestes trabalhos foi apresentada a base dum modelo numérico para escoamentos tri-dimensionais com combustão cujos principais pressupostos eram o uso de um novo modelo de combustão designado por "Sistema de Reacção Química Simplificada" (SRQS) e o cálculo da viscosidade efectiva através de uma relação algébrica.
Na presente comunicação, a revisão bibliográfica vai ser dividida em três partes, baseando-se esta divisão no tipo de aplicação.

i) Câmaras de Combustão de Turbinas de Gás

Patankar e Spalding [3] introduziram no modelo apresentado em [1,2] o então recente modelo de turbulência a duas equações desenvolvido por Jones and Launder [4]. Neste trabalho foram utilizadas coordenadas cartesianas e a câmara de combustão anular considerada foi idealizada como uma caixa de forma rectangular.
Jones et al. [5] and Jones and Priddin [6] desenvolveram um modelo para a simulação dos fenómenos ocorrentes dentro de uma câmara de combustão de turbina de gás. O modelo permite tratar combustíveis líquidos, descrevendo o campo de concentração das gotas através de uma equação para a função densidade de probabilidade do tamanho das gotas, e calcular a concentração de NO, assumindo que a formação de NO pode ser descrita pelo mecanismo de Zeldovich. O modelo de combustão empregue baseou-se no modelo de equilibrio quimico de Gordon e McBride [7].

Serag-Eldin e Spalding [8] calcularam o escoamento, com combustão, numa câmara de combustão tri-dimensional, usando coordenadas polares e condições de fronteira cíclicas para o tratamento do "swirl". O modelo de combustão utilizado foi o SRQS.

Jones e McGuirk [9] usaram uma modelação análoga à de [6] para testar os resultados obtidos, mediante confronto com dados experimentais, para geometrias bi-dimensionais axissimétricas e tri-dimensionais, com ou sem combustão. Para câmaras bi-dimensionais axissimétricas, com combustível gasoso o acordo entre os resultados numéricos e experimentais é razoável, embora um conhecimento imperfeito das condições de fronteira torne difícil conclusões precisas e haja indicações de incapacidade do modelo de turbulência utilizado, modelo a duas equações, de prever com suficiente precisão o escoamento, particularmente quando há "swirl".

Boysan et al. [10] apresentaram um modelo para a combustão de sprays em câmaras de combustão de turbinas de gás. O modelo de combustão utilizado envolve a resolução de equações de conservação das fracções mássicas de combustível e de oxigénio. Este trabalho teve em atenção a influência da radiação, incorporando no cálculo um modelo de fluxos [11].

Coupland e Priddin [12] aplicaram um modelo matemático à previsão do escoamento e combustão numa câmara de combustão anular de uma turbina de gás industrial. A principal inovação reside na geração da malha utilizada. Esta é definida em duas dimensões, com o auxilio da transformação de Schwarz-Cristoffel e depois gerada em 3 dimensões por rotação em torno do eixo de simetria. Comparação, com resultados experimentais, do campo de velocidades com e sem combustão, da distribuição de temperaturas no plano de saída e da emissão de NO_x, revelou uma precisão aceitável.
Sampath e Ganesan [13] previram numericamente o escoamento e a combustão na mesma câmara de combustão e nas mesmas condições experimentais usadas por Katsuki, Mizutani e Shibuva [14]. O modelo de combustão envolve a resolução de equações de conservação da fracção mássica de combustível, de CO e da fracção de mistura. Para o cálculo da radiação usaram um modelo de fluxos e incluíram também um modelo para vaporização e combustão de gotas de combustíveis líquidos. Os resultados revelaram acordo qualitativo com os dados experimentais mas foram observadas diferenças quantitativas. Estas foram atribuídas ao facto de a malha não ser suficientemente refinada, ao modo simplista como foi tratada a injecção de combustível e a deficiências do modelo de combustão.

ii) Caldeiras

Robinson [15] apresenta o primeiro estudo numérico tri-dimensional baseado no tratamento integral do escoamento, combustão e transferência de calor para uma caldeira com queimadores tangenciais de grandes dimensões do tipo normalmente usado nas centrais produtoras de energia eléctrica. Neste trabalho foi utilizado o modelo de turbulência a duas dimensões, um modelo de combustão de reacção infinita SRQS e o modelo de radiação dos fluxos. O algoritmo de cálculo foi só aplicado ao caso de queima de combustíveis gasosos.
Previsões numéricas do escoamento, temperatura e fluxos de calor para uma caldeira com queimadores tangenciais para combustível gasoso foi apresentado por Abbas et al. [16]. O modelo apresentado é semelhante ao modelo de [15] sendo no entanto usado para a modelação da radiação um sub-modelo muito mais poderoso do que o modelo dos fluxos - o modelo da transferência discreta - desenvolvido por

Lockwood e Shah [17]. Neste trabalho é também apresentada a previsão da trajectória de partículas não sendo no entanto considerada a sua combustão. Tratou-se de um passo importante para o desenvolvimento de modelos que considerassem a queima de combustíveis sólidos.
Adbel-Rahman et al. [18] apresentaram um modelo matemático para o cálculo do escoamento, temperatura, espécies químicas e fluxos de calor numa caldeira a queimar combustível líquido. O modelo incorporava o standard modelo de turbulência a duas equações, um modelo de combustão de reacção infinita e que considerava a vaporização instantânea do combustível líquido e o modelo da radiação da transferência discreta. O modelo foi validado através de comparação com dados experimentais obtidas numa caldeira semi-industrial.
Modelos tridimensionais para a previsão de escoamento, combustão e transmissão de calor por radiação de uma caldeira a queimar carvão pulverizado foram apresentados por Boyd e Kent [19], Görner e Zinser [20] e mais recentemente por Fiveland e Wessel [21].

iii) Fornos Industriais

Os primeiros passos para a formulação de um modelo computacional para a previsão dos fenómenos ocorrentes num forno tri-dimensional foram dados por Patankar e Spalding [1,2]. Neste trabalho preliminar, não foi incorporado um modelo de turbulência sofisticado, sendo a viscosidade efectiva calculada através de uma relação algébrica.
Modelos físicos mais completos foram incorporados no trabalho de Abou Ellail et al. [22] em que foram considerados dois fornos semi-industriais, um do Gaz de France em Toulouse e outro da IFRF em Ijmuiden, Holanda. Neste trabalho foi utilizado um modelo de turbulência a duas equações, o modelo de combustão SRQS e o modelo de radiação baseado no método dos fluxos.
O trabalho de Pai et al. [23] descreve a aplicação de um modelo tri-dimensional no qual foi usado um modelo de turbulência a duas equações, o modelo de combustão SRQS e o modelo de radiação dos fluxos a um dos fornos semi-industriais da IFRF e a validação do modelo através da comparação com resultados experimentais obtidos no forno.
Gosman et al. [24] apresentaram um modelo de cálculo tri-dimensional para câmaras de combustão de um forno industrial, no qual resolviam o escoamento turbulento com combustão e a transferência total de calor, usando para as previsões de radiação o método da transferência discreta. As previsões estavam de acordo com os pouquíssimos resultados disponíveis - temperaturas de saída dos gases e temperaturas do tecto.
Carvalho [25] apresentou um modelo para a previsão do escoamento tri-dimensional e dos processos de combustão e transferência de calor dentro de um forno industrial. Neste trabalho foi usado um modelo de turbulência a duas equações, um modelo de combustão de reacção infinita, um modelo estatístico para as flutuações da fracção de mistura, um modelo para a formação/oxidação de fuligem e um modelo de radiação. O modelo foi aplicado a um forno de fusão de vidro com uma geometria complexa e foi considerado o caso da queima de vários combustíveis gasosos e um combustível líquido.
Após este trabalho, investigação fundamental conducente ao aperfeiçoamento dos sub-modelos com especial ênfase no modelo de radiação e de formação de fuligem e à inclusão do modelo de formação de NO, tem sido realizada no Departamento de Engenharia Mecânica do Instituto Superior Técnico.

1.3 Objectivo da Presente Comunicação

O objectivo principal da presente comunicação é descrever os princípios da modelação física, matemática e numérica de câmaras de combustão, apresentando cinco exemplos de aplicação a casos reais, evidenciando as possibilidades e vantagens da aplicação destes modelos no projecto e na procura das condições óptimas de funcionamento em câmaras de combustão industriais.

2. DESCRIÇÃO DO MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO

2.1 Modelo Físico-Matemático

O escoamento no interior das câmaras de combustão é tri-dimensional, turbulento e, consequentemente, não estacionário. Teoricamente seria possível resolver as equações exactas, dependentes do tempo. Contudo, não é viável a resolução dessas equações devido às pequenas escalas de tempo e de comprimento associadas à turbulência. Mas do ponto de vista da engenharia estamos geralmente interessados no conhecimento de valores médios temporais das propriedades e não nos detalhes da turbulência, pelo que a solução consiste em resolver as equações em termos de valores médios.
As equações de conservação em coordenadas curvilíneas ortogonais, podem todas escrever-se na forma geral:

$$\frac{1}{l_y}\frac{\partial}{\partial x}(\rho U l_y \phi) + \frac{1}{l_x}\frac{\partial}{\partial y}(\rho V l_x \phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho W \phi) =$$

$$= \frac{1}{l_y}\frac{\partial}{\partial x}\left[l_y\left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \phi}{\partial x} - \rho\,\overline{u'\phi'}\right)\right] + \frac{1}{l_x}\frac{\partial}{\partial y}\left[l_x\left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \phi}{\partial y}\right.\right. -$$

$$- \rho \overline{v'\phi'})] + \frac{\partial}{\partial z} [(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} - \rho \overline{w'\phi'})] + S_\phi \qquad (1)$$

em que ϕ representa a variável dependente. Consoante o seu valor assim teremos a equação da continuidade, as equações de conservação da quantidade de movimento, a equação de conservação de energia e a equação de conservação de uma espécie química.
O tratamento das correlações $\overline{u'\phi'}$, $\overline{v'\phi'}$ e $\overline{w'\phi'}$ exige o recurso a um modelo de turbulência. Por sua vez, a complexidade do termo fonte, S_ϕ, nas equações de conservação de uma espécie química e da energia requer o uso de um modelo de combustão e de um modelo de radiação que se descrevem seguidamente.

Modelo de Turbulência

O modelo de turbulência usado na generalidade dos cálculos tri-dimensionais é o k-ε [4], baseado na hipótese de viscosidade turbulenta isotrópica. Envolve a resolução de duas equações de transporte, uma para a energia cinética turbulenta, k, e outra para a sua taxa de dissipação, ε. A análise dimensional permite calcular a viscosidade turbulenta através de

$$\mu_t = \frac{C_\mu \rho k^2}{\varepsilon} \qquad (2)$$

em que C_μ é uma constante do modelo.

Modelo de Combustão

O modelo de combustão baseia-se na hipótese de as taxas de reacção química serem muito elevadas face às taxas de difusão, pelo que prevalece o equilíbrio químico. O estado termodinâmico instantâneo do gás é descrito em termos de uma propriedade conservada, a fracção de mistura, f. Para tal é resolvida a equação de transporte para o seu valor médio.
Em modelação de fornos, a relação entre f e os valores instantâneos das propriedades é determinada assumindo que a reacção química origina um único produto - modelo de reacção química simplificada (SRQS) [2]. Em câmaras de combustão de turbinas de gás é preferível determinar essa relação com base na minimização da energia livre de Gibbs - modelo de equilíbrio químico completo, Gordon e McBride [7]. Em qualquer dos casos, as flutuações da fracção de mistura têm de ser consideradas no cálculo dos valores médios das propriedades. Desprezar estas flutuações resulta na obtenção de perfis de temperatura com picos não realistas. Para modelar as flutuações é necessária uma hipótese relativa à forma da função densidade de probabilidade (f.d.p.) de f (assumiu-se uma distribuição de Gauss truncada [26]). A f.d.p. de f é especificada em termos do seu valor médio e da sua variância - g. Consequentemente, é também necessário resolver a equação de transporte de g, Spalding [27].

Modelo de Radiação

O modelo de radiação utilizado é o modelo de transferência discreta, Lockwood e Shah [17]. Baseia-se na solução da equação de transferência de calor por radiação para uma dada direcção n

$$\frac{dI}{ds} = -KI + \frac{K \sigma T_g^4}{\pi} \qquad (3)$$

em que I designa a intensidade de radiação na direcção n, T_g a temperatura do gás, K o coeficiente de absorção do gás, s é a distância percorrida pelo raio na direcção considerada e σ é a constante de Stefan-Boltzmann.
A equação (3) é resolvida ao longo de raios com direcções "representativas" pré-estabelicidas. O percurso de cada raio é acompanhado e a intensidade de radiação associada ao raio é calculada à entrada e saída de cada elemento de volume que o raio atravessa. São traçados raios de cada uma das células das paredes. A fonte ou poço devido à radiação, em cada elemento de volume, é requerida pela equação da entalpia que traduz a conservação de energia. Para um raio caracterizado por um ângulo sólido elementar dΩ e atravessando uma área dA do elemento de volume, perpendicular à direcção Ω do raio, a fonte/poço de radiação é calculada através de:

$$S_{rad} = (I_{n+1} - I_n)\, \Omega\, d\Omega\, dA \qquad (4)$$

em que I_n e I_{n+1} são respectivamente as intensidades de radiação à entrada e saída do elemento de volume. O termo fonte da equação da entalpia, para cada elemento de volume, é calculado pelo somatório das fontes/poços devidas a todos os raios que atravessem esse elemento de volume.
A emissividade da mistura de gases/fuligem pode ser obtida através do modelo de mistura de dois gases cinzentos e um gás transparente [28].

Modelos de Poluentes

A combustão de hidrocarbonetos no seio do ar, a elevadas temperaturas, origina a formação de poluentes, entre os quais NO_x e fuligem. A sua presença indesejável e o facto da fuligem aumentar significativamente a transferência de calor por radiação, mesmo quando presente em pequenas proporções, traduz a necessidade de conhecer a distribuição espacial das respectivas concentrações. Os modelos da fuligem e NO_x são descritos de seguida.

a) Formação/oxidação de fuligem

A distribuição espacial da média temporal da fracção mássica de fuligem - m_s - é obtida a partir da resolução da sua equação de transporte, na qual são introduzidos como fontes, termos referentes à sua formação e à sua combustão: $S_s = S_f - S_d$.
S_f corresponde à taxa de formação de fuligem e é dado por Khan e Greeves [29]:

$$S_f = C_f\, p_{fu}\, \phi^n \exp(-E/R_0\, T) \qquad (5)$$

em que p_{fu} é a pressão parcial do combustível, T a temperatura dos gases, ϕ a razão de equivalência, R_0 a constante universal dos gases perfeitos e C_f,E e n constantes do modelo.
S_d corresponde à taxa de oxidação de fuligem e é dado por Magnussen e Hjertager [30]:

$$S_d = \min\left[A\, m_s \left(\frac{\varepsilon}{k}\right), A\left(\frac{m_{ox}}{m_s s_s + m_{fu} s}\right) m_s \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)\right] \qquad (6)$$

em que s_s e s representam a quantidade de oxigénio necessária à oxidação de 1 kg de fuligem e 1 kg de combustível, respectivamente, e A é uma constante do modelo.

b) Formação de Nox

Em sistemas de combustão, com níveis elevados de temperatura a formação de óxidos de azoto atmosférico de origem térmica é descrita pelo mecanismo de Zeldovich:

$$\begin{aligned}
N_2 + O &\rightleftharpoons NO + N \\
N + O_2 &\rightleftharpoons NO + O \\
N + OH &\rightleftharpoons NO + H \qquad (7) \\
OH + O &\rightleftharpoons O_2 + H \\
M + O_2 &\rightleftharpoons O + O + M
\end{aligned}$$

A taxa instantânea de formação de NO é dada por [31]:

$$\frac{d[NO]}{dt} = \frac{2[O](K_1 K_2 [O_2][N_2] - K_{-1} K_{-2} [NO]^2)}{K_2 [O_2] + K_{-1} [NO]} \qquad (8)$$

em que K representa a taxa de reacção e é obtida de Baulch et al. [32]. A resolução da equação de transporte da concentração mássica de óxido de azoto requer como termo fonte o valor médio da sua taxa de formação obtido de:

$$\overline{R_{NO}} = \int_0^1 R_{NO}(f)\, P(f)\, df \qquad (9)$$

2.2 Equações do Modelo Matemático

O modelo matemático descrito nas secções anteriores envolve a resolução das seguintes equações diferenciais às derivadas parciais:

- continuidade;
- conservação da quantidade de movimento: 3 equações, uma para cada uma das componentes da velocidade - U,V e W;
- energia cinética turbulenta, k;
- taxa de dissipação da energia cinética turbulenta, ε;
- fracção de mistura f;
- variância da fracção de mistura, g;
- entalpia, h;

Num sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais, as equações podem exprimir-se através da forma geral [1] em que o coeficiente de difusão $\Gamma_{\phi,ef}$ e o termo de fonte S_ϕ são discriminadas na Tabela I.
As constantes do modelo de turbulência e do modelo de combustão, bem como os valores dos números de Prandtl turbulentos para as diversas equações, são apresentados nas Tabelas II a IV.
A transferência de calor por radiação é descrita através da equação diferencial ordinária [3]. As constantes empíricas necessárias para o cálculo da emissividade são apresentadas na Tabela V.

TABELA I - Termos fonte das equações de conservação em coordenadas curvilíneas ortogonais

ϕ	$\Gamma_{\phi,ef}$	S_ϕ
Eq. Cont.	1	0
U	μ_{ef}	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x - \frac{1}{l_y}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2}{3}\mu_{ef}\, l_y\, (\nabla . V)\right] - \rho\frac{UV}{l_x}\frac{\partial l_x}{\partial y} + \rho\frac{V^2}{l_y}\frac{\partial l_y}{\partial x} +$

$$+\frac{1}{l_y}\frac{\partial}{\partial x}\left[l_y\mu_{ef}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{2V}{l_x}\frac{\partial l_x}{\partial y}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{l_x}\frac{\partial}{\partial y}\left[l_x\mu_{ef}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{V}{l_y}\frac{\partial l_y}{\partial x}-\frac{U}{l_x}\frac{\partial l_x}{\partial y}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{ef}\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\mu_{ef}\frac{1}{l_x}\frac{\partial l_x}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}-\right.$$

$$\left.-\frac{V}{l_y}\frac{\partial l_y}{\partial x}-\frac{U}{l_x}\frac{\partial l_x}{\partial y}\right)-2\mu_{ef}\frac{1}{l_y}\frac{\partial l_y}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{U}{l_y}\frac{\partial l_y}{\partial x}\right)$$

V μ_{ef}

$$-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y-\frac{1}{l_x}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2}{3}\mu_{ef}l_x(\nabla\cdot\mathbf{V})\right]+$$

$$+\rho\frac{U^2}{l_x}\frac{\partial l_x}{\partial y}+\frac{1}{l_x}\frac{\partial}{\partial y}\left[l_x\mu_{ef}\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{2U}{l_y}\frac{\partial l_y}{\partial x}\right)\right]-$$

$$-\rho\frac{UV}{l_y}\frac{\partial l_y}{\partial x}+\frac{1}{l_y}\frac{\partial}{\partial x}\left[l_y\mu_{ef}\left(\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{V}{l_y}\frac{\partial l_y}{\partial x}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{U}{l_x}\frac{\partial l_x}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{ef}\frac{\partial W}{\partial y}\right)+$$

$$+\mu_{ef}\frac{1}{l_y}\frac{\partial l_y}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{V}{l_y}\frac{\partial l_y}{\partial x}-\right.$$

$$\left.-\frac{U}{l_x}\frac{\partial l_x}{\partial y}\right)-2\mu_{ef}\frac{1}{l_x}\frac{\partial l_x}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{V}{l_x}\frac{\partial l_x}{\partial y}\right)$$

W μ_{ef}

$$-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{2}{3}\mu_{ef}(\nabla\cdot\mathbf{V})\right]+\frac{1}{l_y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_{ef}l_y\frac{\partial U}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{1}{l_x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{ef}l_x\frac{\partial V}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{ef}\frac{\partial W}{\partial z}\right)$$

---

k	μ_{ef}/σ_k	$G-\rho\varepsilon$
ε	$\mu_{ef}/\sigma_\varepsilon$	$C_1\frac{\varepsilon}{k}G-C_2\rho\frac{\varepsilon}{k}\varepsilon$
f	μ_{ef}/σ_f	0
g	μ_{ef}/σ_g	$C_{g1}\mu_t\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]+$ $-C_{g_2}\rho\frac{\varepsilon}{k}g$
h	μ_{ef}/σ_h	S_{rad}

TABELA II - Constantes do modelo de turbulência

CONSTANTE	VALOR
$C\mu$	0.09
C_1	1.44
C_2	1.92
σ_k	0.90
σ_ε	1.22

TABELA III - Constantes do modelo de combustão

CONSTANTE	VALOR
Cg1	2.80
Cg2	2.00

TABELA IV - Números de Prandtl turbulento para f, g e h.

CONSTANTE	VALOR
σ_f	0.90
σ_g	0.90
σ_h	0.90

TABELA V - Constantes do modelo de mistura de gases e fuligem.

n	n'	$\beta_{1,n,n'}$	$\beta_{2,n,n'} \times 10^3$	$k_{g,n}$	$k_{s,n'}$
		Óleo pw /pc = 1			
1	1	0.717	-0.2964	0.0	925
1	2	-0.231	0.3861	0.0	4710
2	1	0.459	-0.1787	2.50	925
2	2	-0.078	0.1391	2.50	4710
3	1	0.120	-0.0499	109.0	925
3	2	0.0130	-0.0002	109.0	4710
		Gás pw /pc = 2			
1	1	0.632	-0.2619	0.0	1130
1	2	-0.195	0.3332	0.0	5720
2	1	0.488	-0.1896	1.88	1130
2	2	-0.098	0.1844	1.88	5720
3	1	0.176	-0.0735	68.8	1130
3	2	0.003	-0.0074	68.8	5720

Unidades: T [K]
$k_{g,n}$ $[m.atm]^{-1}$
$k_{s,n'}$ $[m.kg/m^3]^{-1}$

$\varepsilon_m = \Sigma\, a_{m,n,n'}(T)\ .\ [1 - \exp(-k_{g,n} - k_{s,n'} m_s)\, L]$

onde m_s é a fracção mássica de fuligem e

$a_{m,n,n'}(T) = \beta_{1,n,n'} + \beta_{2,n,n'}(T)$

2.3 Modelo Numérico

As equações às derivadas parciais constitutivas do modelo matemático são discretizadas pelo método do volume de controlo conduzindo a equações às diferenças finitas. A discretização do termo convectivo é feita através do esquema híbrido [33]. Para resolver essas equações subdividiu-se o domínio de cálculo num número finito de volumes de controlo - as células. As velocidades e as pressões são calculadas através de uma variante do algoritmo SIMPLE [34] para o caso dos cálculos com combustão, sendo usado para os cálculos sem combustão (exemplo, tanque de vidro em fusão) o algoritmo PISO [35].

A solução dos sistemas de equações algébricas individuais é obtida combinando o algoritmo TDMA ("Tri-diagonal matrix algorithm") com o método de Gauss-Seidel.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A aplicação dos modelos atrás descritos a diversas geometrias em condições de funcionamento reais, é descrita de seguida.

3.1 Câmara de Combustão de uma Turbina de Gás.

Nas duas últimas décadas, a consciência da escassez das fontes de energia, acompanhada do aumento do preço dos combustíveis, por um lado, e a legislação limitando a emissão de poluentes libertados na combustão, por outro, conduziram à necessidade permanente de optimizar o funcionamento dos equipamentos onde se dá a combustão, entre as quais as câmaras de combustão das turbinas de gás.

Face à multiplicidade dos requisitos a satisfazer, interdependentes e alguns deles incompatíveis (eficiência de combustão elevada, ignição fiável, limites de flamabilidade amplos, insensibilidade a manifestações de instabilidade na combustão, baixa queda de pressão, distribuição de temperaturas à saída projectada de modo a maximizar a vida das pás da turbina, custo mínimo, durabilidade máxima, facilidade de manutenção e baixas emissões de fumo e de poluentes) a optimização do funcionamento só é possível mediante um conhecimento detalhado dos fenómenos que ocorrem no interior da câmara de combustão. Daí o esforço que tem sido desenvolvido nos últimos anos no sentido de melhorar esse conhecimento, tanto a nível experimental como a nível da modelação matemática.

A despeito do numeroso trabalho desenvolvido na modelação matemática de câmaras de combustão de turbinas de gás, referido na secção 1.2., tem sido prestada pouca atenção à transmissão de calor por radiação. A maioria dos autores que usaram modelos matemáticos para o estudo de turbinas de gás ignoraram a radiação, com o argumento de ser desprezável face ao calor libertado na combustão. No entanto, se quisermos conhecer a distribuição de temperaturas nas paredes da câmara de combustão, o cálculo dos fluxos de radiação é indespensável. O interesse prático desse conhecimento advém da circunstância de as paredes não poderem suportar, para os materiais de uso corrente, temperaturas superiores a 1100 K [36]. Dado que na zona primária a temperatura do gás pode atingir valores da ordem de 2300 K é necessário que as paredes sejam arrefecidas, de modo a garantir que não se ultrapassa aquele limite. Caso contrário, as tensões de origem térmica poderão levar à propagação de fissuras e

consequente redução do tempo de vida do "liner" (invólucro da câmara de combustão).

Por outro lado, um cálculo rigoroso da emissão de poluentes necessita também de um conhecimento preciso da transferência de calor por radiação, uma vez que os modelos para o cálculo da emissão do monóxido de carbono, óxidos de azoto ou hidrocarbonetos não queimados requerem um conhecimento preciso da distribuição de temperaturas em toda a câmara.

Além disso, nos últimos 30 anos tem-se assistido a um aumento da razão de compressão nas turbinas de gás e parece provável que essa tendência se mantenha. Isto é acompanhado por um aumento de calor transferido por radiação, justificando a importância de que o fenómeno se reveste. Tornou-se portanto premente desenvolver modelos de radiação ou adaptar os modelos já existentes às condições das câmaras de combustão de turbinas de gás.

O conjunto dos modelos matemático e físicos de turbulência, combustão (equilíbrio químico) e radiação atrás descritos, foram englobados num algoritmo de cálculo numérico que foi aplicado a uma câmara de combustão anular com 18 queimadores (Figura 1), em que o combustível é propano. As paredes anulares interior e exterior têm orifícios para a entrada de ar secundário e de diluição. Na secção de entrada, junto às paredes anulares, é admitido ar de arrefecimento que se destina a impedir que a temperatura dessas paredes atinja um nível tal que as tensões de origem térmica provoquem a danificação permatura da câmara.

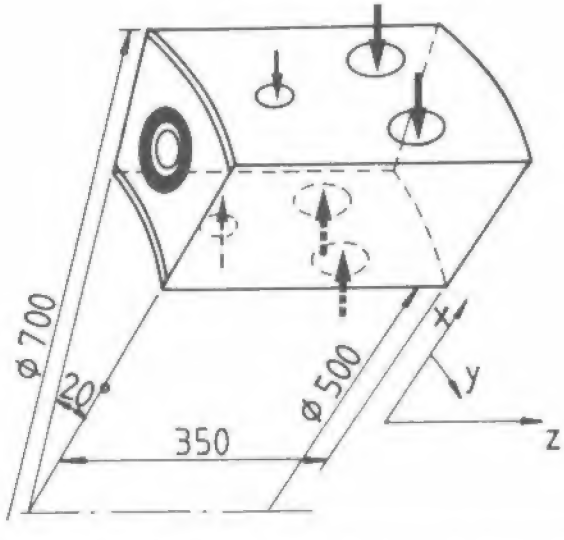

Figura 1 - Geometria da câmara de combustão da turbina de gas.

No trabalho de Carvalho, Durão e Lockwood [37] foi calculada a distribuição dos fluxos por radiação através do uso do modelo de transferência discreta. A equação da entalpia foi considerada e nela foi incluído um termo de fonte devido à radiação. A distribuição de temperatura foi calculada a partir da distribuição de entalpias. No entanto, neste trabalho, a distribuição de temperaturas nas paredes foi assumida (tomada como constante e igual à temperatura do ar de admissão), a qual foi usada como condição de fronteira para o cálculo da transferência de calor por radiação.

O trabalho de Carvalho e Coelho [38] dá um contributo importante para a modelação dos fenómenos ocorrentes dentro das câmaras de combustão de turbinas a gás, ao apresentar pela primeira vez na literatura o cálculo simultâneo da distribuição dos fluxos e das temperaturas nas paredes. Para conseguir determinar a distribuição de temperaturas e de fluxos nas paredes da câmara, foi estabelecido um balanço energético aplicado a cada elemento de volume adjacente à fronteira do domínio de cálculo.

No trabalho de Carvalho e Coelho [39] foi investigado o efeito da pressão na transferência de calor por radiação para três condições de funcionamento (Tabela VI).

Na figura 2 são apresentadas, como exemplo, as distribuições de fluxos e de temperaturas na perede anular superior para a pressão de 25 bar.

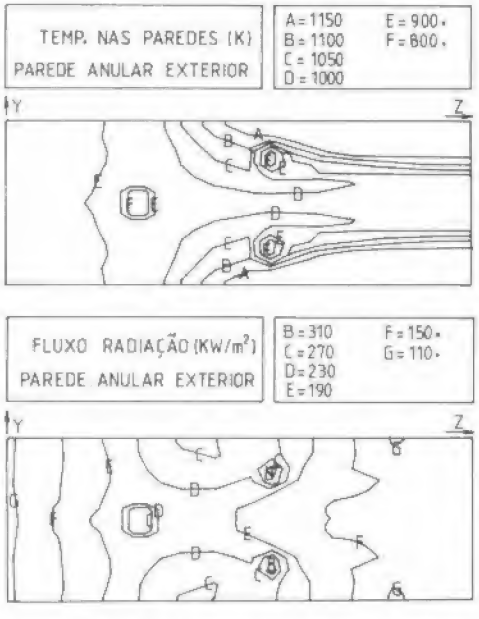

Figura 2 -Distribuição de fluxos e de temperaturas da parede anular superior (p = 25 bar) na câmara de combustão da turbina de gás.

A localização dos orifícios de entrada de ar secundário e do ar de diluição é facilmente reconhecível pela presença de isotérmicas fechadas de baixas temperaturas. Na zona primária e no início da zona intermédia, a temperatura é bastante

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Pressão (Bar)	5	15	25
Temp.entrada ar (K)	400	600	750
Temp.entrada combustível (K)	300	400	500
Caudal de ar primário (Kg/s)	0.233	0.466	0.621
Caudal ar arrefecimento (Kg/s)	0.146	0.292	0.398
Caudal ar secundário (Kg/s)	0.114	0.227	0.304
Caudal ar diluição (Kg/s)	0.172	0.341	0.456
Caudal combustível (Kg/s)	0.011	0.022	0.0295
Razão ar/combustível	60	60	60

TABELA VI - Condições de funcionamento da câmara de combustão da turbina de gás.

uniforme, inferior a 1000K, evidenciando o efeito protector dos jactos de ar de arrefecimento. À medida que se caminha para jusante, a difusão provoca a atenuação progressiva desse efeito protector, pelo que a temperatura na perede tende a aumentar.

O conhecimento da distribuição de temperaturas nas paredes reveste-se de grande interesse prático porque, como já foi referido, a temperatura das paredes não deverá ultrapassar um determinado nível, que para os materiais de uso corrente é 1100K. Verifica-se que no caso estudado, esta restrição é razoavelmente satisfeita, com excepção das regiões da zona de diluição onde a temperatura excede os 1150K.

Os fluxos de radiação aumentam progressivamente na zona primária para jusante, desde valores da ordem dos 100 KW/m^2 até fluxos da ordem dos 200 KW/m^2. Na zona intermédia os fluxos atingem valores elevados, chegando em alguns locais a ultrapassar os 300 KW/m^2, o que é consequência das temperaturas elevadas dos gases nesta região. Na zona de diluição a tendência é no sentido de uma diminuição dos fluxos devida ao elevado valor das temperaturas da parede.

Nota-se também a ocorrência dos valores mais elevados dos fluxos nos locais dos orifícios de ar secundário e de diluição. Estes fluxos são mais elevados do que para as paredes mas, dado que os orifícios cobrem uma área inferior a 5% da área total da parede, este facto não é significativo.

Na Tabela VII são apresentados os fluxos de radiação, convecção e total nas paredes da câmara de combustão para os 3 casos estudados, bem como os quocientes entre esses fluxos e a potência calorífica libertada na combustão. Pode verificar-se que os fluxos são pequenos em face da energia libertada na combustão. Os fluxos de convecção são ligeiramente superiores aos de radiação mas, graças aos jactos de ar de arrefecimento, mantém-se em níveis baixos. Este ar de arrefecimento reduz a eficiência da combustão e contribui para a presença de poluentes nos gases de escape mas a sua presença é necessária para manter a temperatura das peredes num nível aceitável.

Pressão (Bar)	Qr [KW]	Qr/P (%)	Qc [kW]	Qc/P (%)	Qt [kW]	Qt/P (%)
5	119.8	1.30	131.2	1.42	251.0	2.72
15	232.3	1.26	308.9	1.68	541.2	2.94
25	255.7	1.04	326.2	1.32	581.9	2.36

Qr	fluxo de calor nas paredes devido à radiação.
Qc	fluxo de calor nas paredes devido à convecção.
Qt + Qr = Qc	fluxo total nas paredes.
P	potência calorífica libertada na combustão.

Neste estudo, a razão ar/ combustível foi mantida constante, sendo aumentada a pressão, a temperatura e o caudal do ar de admissão.

O aumento da pressão traduz-se num aumento substancial dos fluxos, que passaram para cerca do dobro quando a pressão passou de 5 a 15 bar. Mas o aumento de 15 para 25 bar levou a um aumento mais ligeiro dos fluxos. Esse aumento á cerca de 10% para a radiação e ainda menor para a convecção.

Os resultados destes trabalhos [37,38,39] demonstraram que a distribuição de temperaturas nas paredes pode ser calculada, para qualquer câmara, através de um balanço energético às paredes. O método delineado constitui o único

processo correcto para o cálculo dessa distribuição de temperaturas.

3.2 Forno de Vidro de Garrafas da Sociedade Saint-Gobain

Os modelos anteriormente descritos, à excepção do modelo e formação de óxido de azoto, foram aplicados a um forno industrial de fusão de vidro para garrafas da Sociedade Saint-Gobain, [40,41,42,43].
Este forno (vide Figura 3) é aquecido com uma chama em ferradura com dois pórticos colocados numa das paredes. Cada um dos pórticos contém 5 injectores. O forno queima alternadamente a partir de cada um dos pórticos, funcionando cada pórtico de entrada ou de exaustão. Os produtos de combustão passam através de um regenerador que serve para pré-aquecer o ar da combustão antes dele entrar no forno. O ar é injectado com uma inclinação de 16° em direcção à soleira do forno.e o combustível com uma inclinação de 8° em direcção ao tecto do forno, sendo estes valores ajustáveis. As matérias primas (areia, aragonite, dolomite) e o vidro reciclado entram no forno, na parede lateral junto à parede que contém os pórticos e flutuam à superfície do vidro fundido. Esta carga sofre reacções químicas, funde e vai ser misturada por convecção natural e difusão. O vidro é removido através de uma garganta existente na parede oposta à parede que contém os pórticos.

O principal objectivo deste estudo foi determinar a geometria óptima do forno e as condições óptimas de funcionamento. O referido estudo permitiu a análise das condições de funcionamento do forno a queimar gás natural e fuelóleo pesado.

A simulação foi dividida em três partes, sendo a primeira referente à simulação da câmara de combustão (para gás e para óleo). Para a simulação da região de fusão da matéria prima, foi usado um programa bi-dimensional parabólico com um modelo para a reacção e outro para a fusão. Por fim, para a simulação do tanque com vidro fundido foi usado um programa elíptico laminar tri-dimensional.
A figura 4 mostra as distribuições do fluxo de calor para o vidro nos casos em que o combustível é um fuelóleo e gás natural. Verifica-se que queimando fuelóleo o fluxo de calor para o vidro é superior. As diferenças verificadas na performance do forno queimando gás natural e fuelóleo (Tabela VIII), são devidas à maior emissividade da chama no caso do fuelóleo tendo como consequência o aumento de transferência de calor para o vidro. Os fornos queimando gás natural têm maior duração devido à temperatura da abóbada ser menos elevada e mais uniforme. Os fornos queimando gás natural são limpos e conduzem a uma menor emissão de poluentes.

Os resultados obtidos concordam (qualitativamente) com os poucos resultados experimentais existentes.

3.3 Forno de Vidro Cerâmico da Metal Portuguesa

A presente aplicação consiste na simulação numérica dos fenómenos ocorrentes na câmara de combustão de um forno de vidro cerâmico, utilizando os modelos atrás descritos, excepto o modelo de emissão de NO_x, [44, 45].
Com o fim de validar os métodos de cálculo e aprofundar o conhecimento dos processos de combustão foi desenvolvido um programa de investigação experimental no forno em condições normais de funcionamento [46, 47].
Conforme a Figura 5, trata-se de um forno de funcionamento contínuo com escoamento em ferradura, em que o comburente é o oxigénio e o

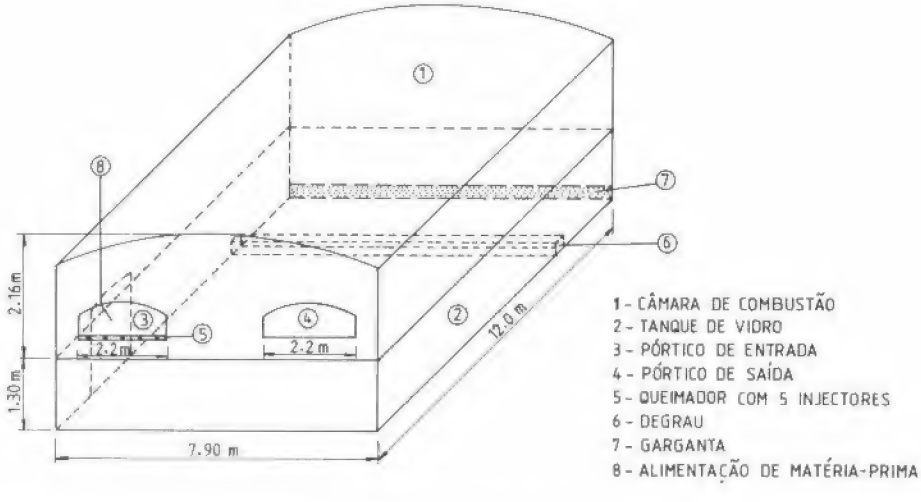

Figura 3 - Geometria do forno Saint-Gobain.

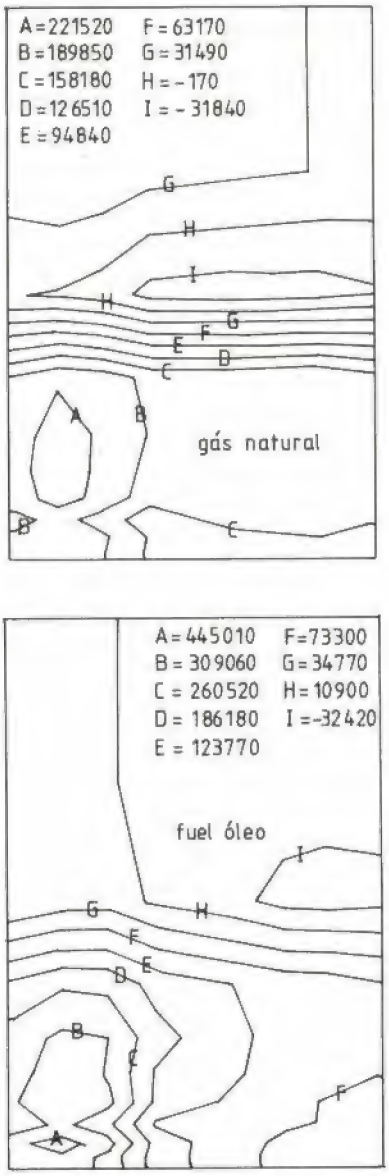

Figura 4 - Distribuição do fluxo de calor para o vidro em [W/m²] no forno de Saint-Gobain

combustível um fuelóleo pesado. O oxigénio é admitido no forno à temperatura ambiente enquanto que o combustível é pré-aquecido. Existe apenas um queimador descentrado que se encontra inclinado para o chão a 4°. A porta de saída dos gases de combustão, que comunica directamente com a chaminé de exaustão dos mesmos, serve de saída para a matéria em fusão e encontra-se situada numa parede lateral. O forno é alimentado de matéria prima por uma porta situada na parede oposta à do queimador, originando aí um empilhamento desse material por acumulação do mesmo. O escoamento da matéria fundida para o exterior, faz-se por efeito da gravidade, em contra-corrente com a chama.

As condições de funcionamento do forno encontram-se na Tabela IX.

	Gás Natural	Fuelóleo
Fluxo de calor por radiação para a superfície de vidro [W/m²]	1.0661 x 10^7	1.1194 x 10^7
Fluxo de calor por convecção para a superfície de vidro [W/m²]	1.7979 x 10^5	8.084 x 10^4
Temperatura dos gases à saída [K]	1678	1650
Temperatura máxima da abóboda [K]	1830	1983
Velocidade de saída[m/s]	16.1	15.8

TABELA VIII - Comparação da performance do forno da Saint-Gobain queimando gás natural e fuelóleo.

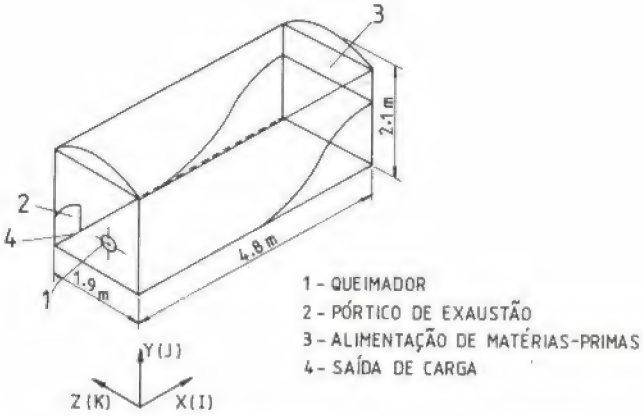

Figura 5 - Geometria do forno da Metal Portuguesa.

A figura 6 mostra, a título de exemplo, a comparação entre os perfis de temperatura e as concentrações de oxigénio medidos e calculados. Como se pode verificar, a concordância entre os valores é excelente. A temperatura média do gás e a concentração de fuligem estão representadas na Figura 7 para um plano vertical que atravessa o queimador. A temperatura média de gás é praticamente homogénea numa grande extensão do forno (valores variando entre 1600K e 1700K). Na zona do queimador a temperatura atinge 3000K. Tomando em consideração que a temperatura adiabática da chama para as condições oxifuel excede 8000K, estes

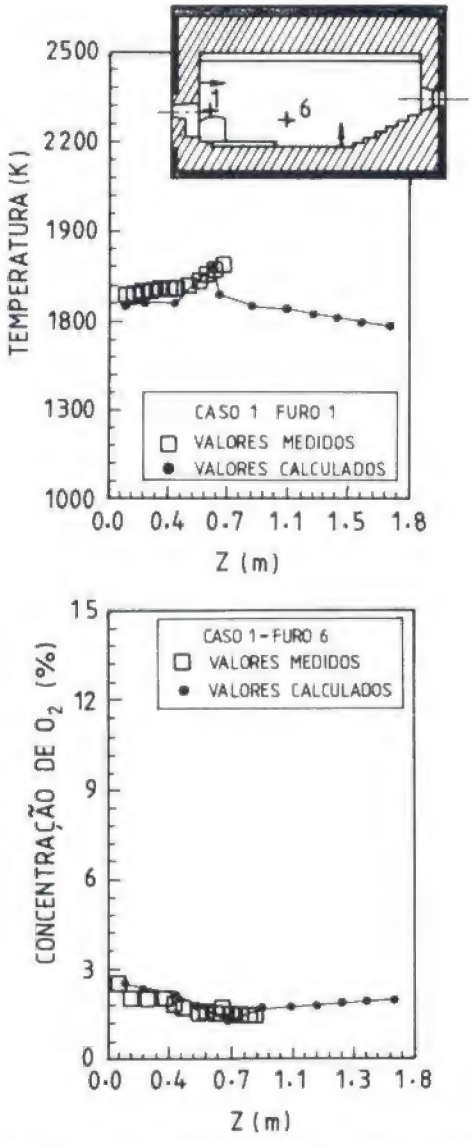

Figura 6 - Comparação entre valores de temperaturas dos gases e concentração de oxigénio medidos e calculados no forno da Metal Portuguesa.

resultados mostram a dominância da transferência de calor por radiação.

De igual modo as concentrações mássicas de fuligem são praticamente homogéneas e com um valor perto de zero em grande extensão do forno.

- Caudal de combustível = 0.03 Kg/s
- Caudal de oxigénio = 0.105 Kg/s
- Excesso de oxigénio = 2%
- Temperatura de entrada do combustível = 393K
- Temperatura de entrada do oxigénio = 300K

TABELA IX - Condições de funcionamento do forno da Metal Portuguesa

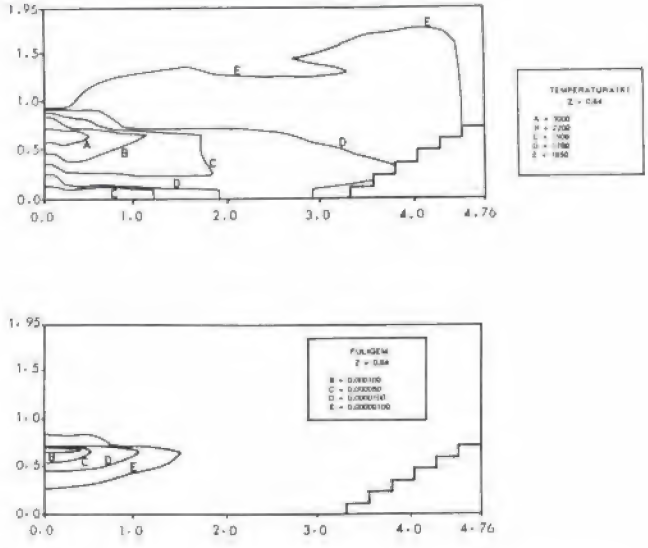

Figura 7- Campos escalares num plano vertical que atravessa o queimador no forno da Metal Portuguesa.
a) Temperatura média dos gases
b) Concentração mássica de fuligem

3.4 Forno de Vidro de Placa Plana Tipo "Pittsburgh"

Este estudo apresenta a simulação completa de um forno de vidro industrial. O cálculo da câmara de combustão é feito de um modo semelhante ao cálculo efectuado no caso dos fornos da Saint-Gobain e da Metal Portuguesa, no entanto um novo modelo bastante mais elaborado é usado para o cálculo dos fenómenos ocorrentes no tanque de vidro [51, 52].

Trata-se de um forno de vidro placa plana do tipo Pittsburgh com queimadores laterais (Figura 8). O forno tem 4 pórticos em cada uma das paredes laterais e cada pórtico tem dois queimadores. O forno queima alternadamente de cada lado, com intervalos de uma hora. Os produtos de combustão passam através de regeneradores sendo o ar de combustão pré-aquecido. O forno queima um fuelóleo pesado e o comburente é ar.

As condições de funcionamento encontram-se na Tabela X.

Os principais objectivos deste trabalho foram a investigação das correntes de convecção e a localização do "ponto-quente" no tanque de vidro em fusão e, a procura de uma melhor eficiência de combustão, uma vez que se verificou que o processo

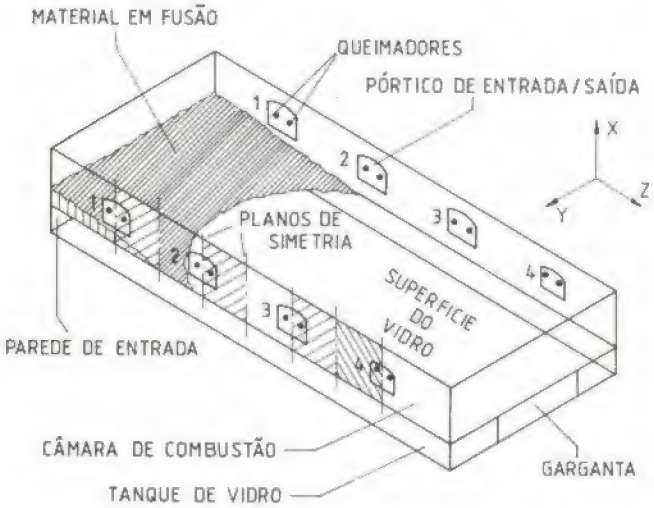

Figura 8 - Geometria do forno de vidro de placa plana tipo "Pittsburgh".

PÓRTICO Nº	1	2	3	4
Caudal total de combustível[kg/h]	327	496	496	175
Caudal total de ar [Kg/h]	5480	8100	8680	3810
Excesso de ar (%)	14	11	19	48
Velocidade do combustível [M/s]	0.505	0.765	0.765	0.27
Velocidade do ar [M/s]	4.23	6.34	6.70	2.94

TABELA X - Condições de funcionamento do forno de vidro de placa plana tipo "Pittsburgh"

de mistura ar/combustível era pobre, existindo ainda combustível não queimado à saída do forno.
A figura 9 contém a distribuição de temperaturas no tanque de vidro mostrando que os valores elevados da temperatura e dos seus gradientes ocorrem na região do "ponto-quente" (com um valor máximo de 1630 K) que se localiza próximo da região do terceiro pórtico de entrada.
Como atrás se referiu, foi efectuado um estudo paramétrico com o intuito de melhorar as condições de funcionamento da câmara de combustão [49, 50]. Assim, estudou-se o efeito do pré-aquecimento e do excesso de ar e o efeito da posição do queimador. Apenas este último revelou melhorias significativas na eficiência do forno.

A figura 10 mostra a distribuição da fracção de mistura num plano vertical, que contém o queimador, normal aos pórticos de entrada e saída,para o caso real (caso 1) e para o caso em que a distância do queimador ao chão do forno foi duplicada (caso 6). Verificou-se que o processo de mistura dos reagentes melhorou na medida em que deixou de haver combustível à saída do forno e o oxigénio não consumido, anteriormente existente na região superior da câmara de combustão, passou a interferir no processo de mistura.
Os resultados obtidos concordam com os poucos valores experimentais para este forno.
Uma conclusão importante deste trabalho foi o facto de os fenómenos ocorrentes na câmara de combustão e no tanque de vidro estarem intimamente interligados e, a não ser que hajam medições precisas da temperatura da superfície de vidro, os cálculos da câmara de combustão e do tanque de vidro deverão ser feitos em conjunto e interligados.

Para um forno de vidro de placa plana semelhante ao apresentado na Figura 8, foi elaborado um trabalho [51] com especial ênfase no problema da emissão de poluentes. Os modelos físico e matemático utilizados foram os mesmos do que no caso descrito anteriormente, tendo no entanto sido incorporado o modelo de formação de NO. Por razões de sigilo, as condições de funcionamento do forno não são apresentadas. Pela mesma razão, os resultados são apresentados numa forma adimensional.
A concentração mássica de NO é mostrada na Figura 11. Os resultados mostram que o NO térmico é produzido principalmente no bordo exterior da chama, na região próxima da mistura estequiométrica, onde as temperaturas são elevadas e a concentração de oxigénio é considerável. A concentração de NO é máxima perto da frente de chama, diminuindo progressivamente para jusante devido à convecção e à difusão para longe da região onde é formado. No pórtico de saída a concentração mássica de NO é uniforme. Este valor está em bom acordo com o valor medido na fábrica.

3.5 Caldeira

O conjunto dos modelos físico-matemáticos descritos na Secção 2 foram englobados num algoritmo de cálculo numérico que foi aplicado a uma caldeira de uma central de produção de energia de modo a calcular o escoamento e a transferência de calor para as paredes da caldeira.
A caldeira examinada no presente estudo foi convertida de queima de carvão para queima de óleo e tem um débito de vapor máximo de 75 Kg/s a 66 bar e a 490°C. As principais dimensões da câmara de combustão estão indicadas na Figura 12. A caldeira tem 16 queimadores, 8 em cada parede lateral.

No trabalho de Carvalho e Coelho [52] foi calculado o campo de velocidades, temperatura, concentrações das diversas espécies químicas e fluxos de calor para as paredes da caldeira.
Os resultados foram comparados com os resultados experimentais de [53].

A título de exemplo, a Figura 13 apresenta a distribuição de fluxo de calor total calculado e medido para uma das paredes da caldeira. Os valores do fluxo de calor concordam com os valores experimentais disponíveis.

4. CONCLUSÃO

O presente trabalho descreve um algoritmo de cálculo do escoamento, transferência de calor, combustão e emissão de poluentes no interior de câmaras de combustão reais. O algoritmo de cálculo foi aplicado a cinco câmaras de combustão: câmara de combustão de uma turbina de gás; um forno de vidro para garrafas; um forno de vidro cerâmico; um forno de vidro de placa plana e uma caldeira do tipo utilizado em centrais produtoras de energia.
As previsões efectuadas com o algoritmo atrás referido, para o forno de vidro cerâmico da Metal Portuguesa, foram extensivamente validadas com resultados experimentais medidos no forno em funcionamento normal, tendo-se verificado uma excelente concordância entre eles.
Este algoritmo constitui um poderoso meio não só para o projecto de engenharia de câmaras de combustão como também para a procura das condições óptimas de funcionamento de sistemas de combustão já existentes.

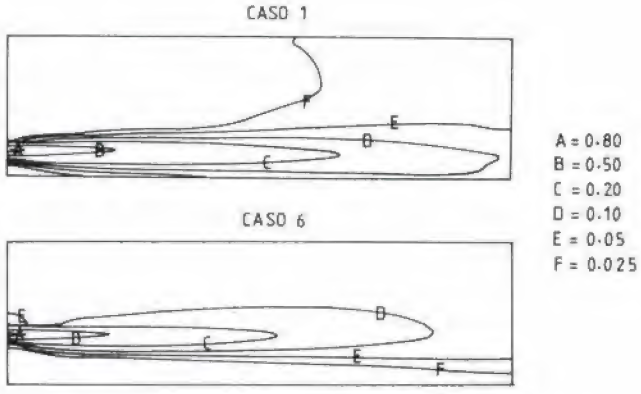

Figura 10 - Distribuição da fracção de mistura na câmara de combustão (caso 1 e caso 6) do forno de placa plana tipo "Pittsburgh".

REFERÊNCIAS

[1] S.V. Patankar and D.B. Spalding (1972). *Proceedings of 4th Symposium of Flames and Industry: Predictive Methods for Industrial Flames*, organized by British Flame Research Committee and Institute of Fuel, Imperial College, London, Sept 19-20, pp. 13-17.
[2] S.V. Patankar and D.B. Spalding (1973). *14th Symposium (International) on Combustion*, The Combustion Institute, Pittsburgh, pp. 604-614.
[3] S.V. Patankar and D.B. Spalding (1974). *Heat Transfer and Flames*, N.H. Afgan and J.M. Béer ed., Scripta Book Co. (Hemisphere-Wiley), Washington, D.C..
[4] W.P. Jones and B.E. Launder (1972). *Int. J. Heat Mass Transfer*, **15**: 301-314.

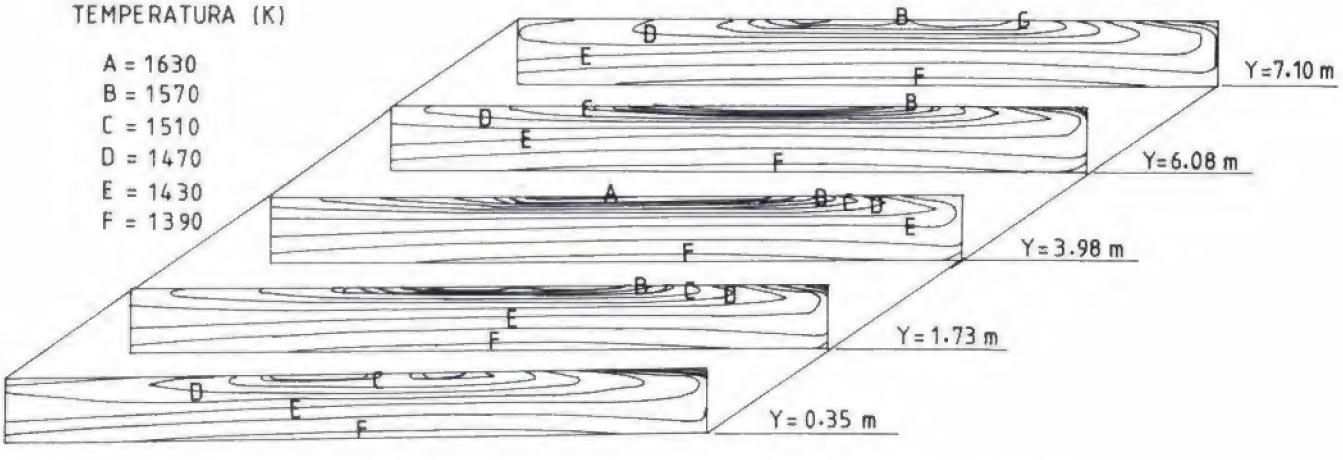

Figura 9 - Distribuição de temperaturas no tanque de vidro do forno tipo "Pittsburgh"

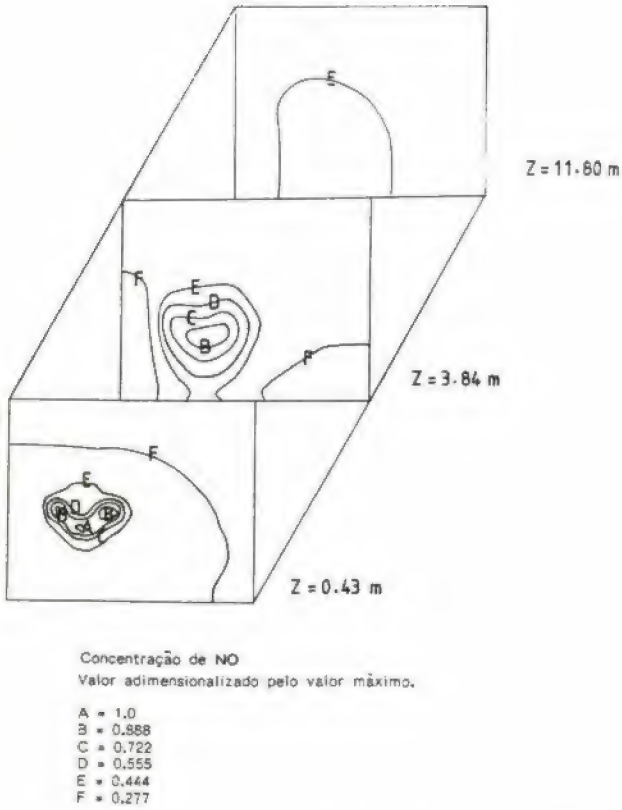

Figura 11 - Concentração mássica de óxido de azoto na câmara de combustão de um forno tipo "Pittsburgh".

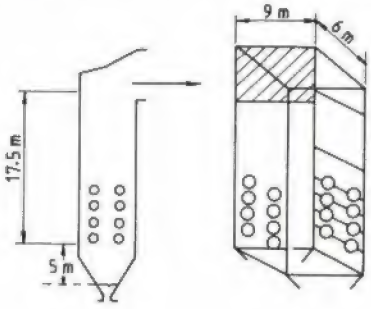

Figura 12 - Esquema da caldeira

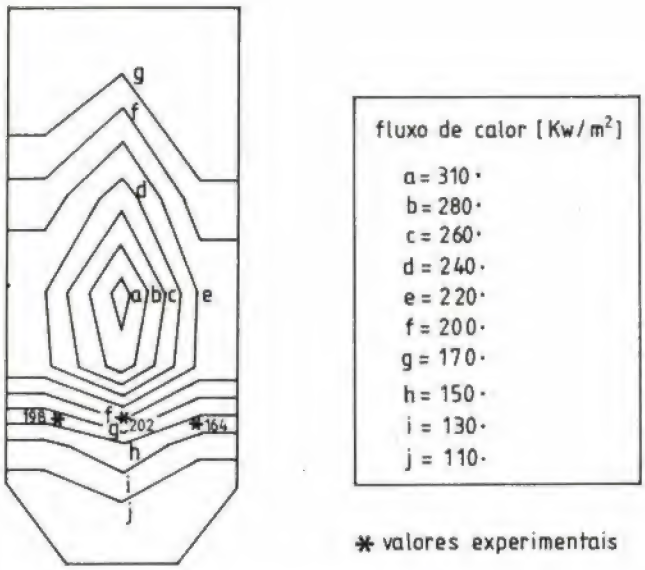

Figura 13 - Distribuição do fluxo total [kW/m²] numa das paredes da caldeira.

[5] W.P. Jones, W.C. Clifford, C.H. Priddin and R. de Chair. *Proc. AGARD 50th Meeting*, Turkey, Paper 40.

[6] W.P. Jones and C.H. Priddin (1978). *17th Symposium (International) on Combustion*, pp. 399-409.

[7] S.Gordon and B. J. McBrid (1971). NASA SP273.

[8] M.A. Serag-Eldin and D.B. Spalding (1979). *Transactions of the ASME*, **101**: 326-336.

[9] W.P. Jones and J. McGuirk (1980). AGARD-CP275, paper nº 4.

[10] F. Boysan, W.H. Ayers, J.Swithenbank and Z. Pan (1981). *J.Energy*, **6**, (6): 368-375.

[11] A.D. Gosman and F. C. Lockwood (1973). *14th Symposium (International) on Combustion*, p. 661.

[12] J. Coupland and C.H. Priddin (1986). *Proc. 5th Turbulente Shear Flow Symp.*, Cornell.

[13] S. Sampath and V. Ganesan (1987). *Journal of the Institute of Energy*, pp. 15-28.

[14] M. Katsuki, Y. Mizutani and K. Shibuya (1977). *Combustion Science and Technology*, **17**: pp. 11-18.

[15] G.F. Robinson (1985). *Journal of the Institute of Energy*, pp. 116-150.

[16] A.S. Abbas, F.C. Lockwood and C. Papadopoulos (1986). *ASME 107th Annual Meeting*, December 7-12, Anheim, California, USA.

[17] F.C. Lockwood and N.G. Shah (1980). *18th Symposium (International) on Combustion*, pp. 1405-1414.

18. M.A. Adbel-Rahman, F.M. El Mahallawy, F.C. Lockwood (1988). *Proc. 1st European Conference on Industrial Furnaces and Boilers*, Lisboa.

[19] R.K. Boyd and J.H. Kent (1986). *21st Symposium (International) on Combustion*, pp. 265-274.

[20] R. Gorner and W. Zinser (1986). *ASME 107th Annual Meeting*, Anheim, California, USA.

[21] W.A. Fiveland and R.A. Wessel (1988). *Transactions of the ASME-Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, pp. 117-126.

[22] M.M.M. Abou-Ellail, A.D. Gosman, F.C. Lockwood and I.E.A. Megahed (1978). *Journal of Energy*, **2**, (2): 71-80.

[23] B.R. Pai, S. Michelfelder and D.B. Spalding (1978). *International Journal of Heat Mass Transfer*, **21**: 571-580.

[24] A.D. Gosman, F.C. Lockwood, I. E. A. Megahed and N. G. Shah (1980). *AIAA 18th Aerospace Sciences Meeting*, California.
[25] M. G. Carvalho. *Computer Simulation of a Glass Furnace*, Ph.D. Thesis, London University.
[26] F.C. Lockwood and A.S. Naguib (1975). *Comb. and Flame*, **24**: 109-124.
[27] D.B. Spalding (1971). *Chemical Eng. Science*, **26**.
[28] J.S. Truelove (1976). AERE Harwell Report nº HL76/3448/K,F.
[29] I.M. Khan and G. Greeves (1974). *Heat Transfer in Flames*, Ed. Afgan and Bèer, pp. 391-402.
[30] B.F. Magnussen and B.H. Hjertager (1976). *16th Symposium (International) on Combustion*, pp. 719-729.
[31] M.G. Carvalho and V. Semião (1988). *Nitric Oxide Modelling on Industrial Glass Furnaces*, Internal Report, Nº 6/88, CTAMFUTL.
[32] D.L. Baulch, D.D. Drysdale, D.G. Horne and A.C. Lloyd (1973). *Evaluated Kinetic Data for High Temperature Reactions*, Vol. 1, 2 e 3, Butterworths, Londres.
[33] D.B. Spalding (1972). *Int. J. for Numerical Methods in Engng.*, **14**: 551-559.
[34] S.V. Patanfar and D.B. Spalding (1972). *Int. J. Heat Mass Transfer*, **15**: 1787.
[35] R.I. Issa (1986). *J. Comput. Phys.*, **62**, (1): 40-65.
[36] A.H. Lefebvre (1983). *Gas Turbine Combustion*, McGraw-Hill, Series in Energy, Combustion and Environment.
[37] M.G. Carvalho, D.F.G. Durão and F.C. Lockwood (1985). AGARD-CP 390, paper nº 20.
[38] M.G. Carvalho and P. Coelho (1987). AGARD/PEP 70th Symposium on Combustion and Fuels in Gas Turbine Engines, paper nº 19, Creta, Grécia, Outubro.
[39] M.G. Carvalho and P. Coelho (1988). *AIAA-Journal of Thermophysics and Heat Transfer*.
[40] M.G. Carvalho and F.C. Lockwood (1980). *Report to Coria*, Faculté des Sciences, Rouen.
[41] M.G. Carvalho, D.F.G. Durão and F.C. Lockwood (1984). *European Congress on Economics and Management of Energy in Industry*, Albufeira, Portugal.
[42] M.G. Carvalho and F.C. Lockwood (1985). *Proc. Institution of Mechanical Engineers*, **199**, (C2): 113-120.
[43] M.G. Carvalho and F.C. Lockwood (1990). *Geastechnische Berichte*, pp 233 - 243.
[44] M.G. Carvalho, D.F.G. Durão and J.C.F. Pereira (1986). *3rd International Conference on Numerical Methods for Non-Linear Problems*, Dubrovnik, Setembro.
[45] M.G. Carvalho, D.F.G. Durão and J.C.F. Pereira (1987). *International Journal of Enginering Computations*, **4**, (1), Março: 23-31.
[46] M. G. Carvalho, D.F.G. Durão, M.V. Heitor, A.L.N. Moreira and J.C.F. Pereira (1988). *1st European Conference on Industrial Furnaces and Boilers*, Lisboa, Março.
[47] M.G. Carvalho, D.F.G. Durão, M.V. Heitor and A.L.N. Moreira (1987). Submetido a *Combustion Science and Technology*.
[48] M.G. Carvalho, P. Oliveira and V. Semião (1988). *J. of the Institute of Energy*, pp 143 - 156.
[49] M.G.Carvalho, P. Oliveira and V. Semião (1987). *Tenth International Symposium on Combustion Processes*, Varsóvia, Polónia, Agosto.
[50] M.G. Carvalho, P. Oliveira and V. Semião (1988). *AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics Series*, pp 363- 384.
[51] M.G. Carvalho, F.C. Lockwood, C. Papadopoulos and V. Semião (1990). *Journal of the Institute of Energy*, pp 39 - 47.
[52] M.G. Carvalho and P. Coelho (1990). *International Journal for Computer - Aided Engineering and Software*, pp 227 - 234.
[53] D. Anson, A.M. Godridge and G. Hammond (1974). *Journal of the Institute of Fuel*, June, pp 83-90.

AGRADECIMENTOS

Os meus agradecimentos aos Engs. Viriato Semião, Pedro Coelho e João Azevedo que comigo têm colaborado com dedicação e entusiasmo e sem os quais este trabalho não seria possível.
Ao meu ex-supervisor, Prof. F.C. Lockwood do Imperial College de Londres, os meus especiais agradecimentos por me ter dado o background necessário à realização do meu trabalho.
A execução deste trabalho foi possível graças à excelente e rápida dactilografia da Sra. D. Salvina Ribeiro.
Desejo exprimir também os meus agradecimentos ao INIC, Ministério da Indústria e Energia, Direcção Geral XII das Comunidades Europeias, Metal Portuguesa, Sociedade St. Gobain (França) e Pilkington Bths (UK) pelo apoio financeiro dos diversos trabalhos.

SPECTRAL ESTIMATION IN THREE STEPS

M. D. ORTIGUEIRA AND J. M. TRIBOLET

Instituto Superior Técnico and INESC

SUMMARY

Spectral Analysis comprises three major steps: methodological support, algorithmic implementation and evaluation procedure.
The first step deals with the theoretical foundations of the spectral estimation models. These, as it is shown, must provide for objective and coherent use of the available information.
The algorithmic implementation step supplies the user with the algorithms to implement the methods found in step one. On the other hand, mathematical justification and some properties of the algorithms must be stated in this step.
The evaluation procedure step allows users to chose, among several spectral estimators, one to use with their particular data problems, according to the constraints of the data space and the information to be obtained from spectral estimates.
This paper discusses this three step procedure for spectral estimation with emphasis on the general framework for the evaluation of spectral analysis techniques from the point of view of the user.

1. INTRODUCTION

Two decades of active research led to a multitude of methods and algorithms to perform spectral estimation. However, there is no general guide to help a user, having a particular data problem, in the difficult task of performing an adequate spectral estimation. We can classify user's problems in two types: a) selection of valid estimators and b) choice of the adequate estimator for his data problem. His difficulties in selecting valid estimators come from the following facts:

1 - The methods are not univocally labelled.
2 - Some methods are not valid, since they lead to non-coherent estimates.
3 - There is no clear distinction between method (model) and algorithm.
4 - Some methods have several implementation algorithms.
5 - Some of the algorithms used to implement a given method may be equivalent although having different formulation and mathematical support.
6 - Some estimation procedures are "ad hoc" and do not have a correct mathematical support.

In this paper we will show how to overcome those problems. This is the object of the first and second procedure steps for Spectral Analysis described in sections 2 and 3, respectively. The first step is called mathematical support and supplies a user with spectral analysis models. The second step is concerned with the algorithmic implementation and allows him to find correct algorithms to implement the methods obtained in the first step. As a consequence of this formulation we define any spectral estimator in terms of a pair method-algorithm.
Supose now that our user followed these steps and reached to a situation of having several spectral estimators. Thus, he is faced with another problem: How to choose one for his particular data problem? The answer to this question is the objective of the third step of Spectral Analysis: the evaluation. This is a very important problem which has not received enough attention in the literature.
Several attempts have been made to pursue it but from very restrictive points of view and with no useful final results. For example, in connection with parametric models several tests have been proposed to verify the adequacy of a given model to the signal being used. The most important of them is the Q-test (Quenouille, 1947) for AR signals. Within the scope of a specific spectral analysis method several tests were proposed which, directly or indirectly, make comparisons between the correct and estimated spectra (see [4], and [6]).
In this paper and following [13], we adress the problem of evaluating spectral estimators according to some pre-specified criteria and working space of signals. In other words, we suppose given a class of stochastic processes and a criterion (or criteria) under which we want to measure each spectral estimator, as estimator for the class.

Of course, we do not intend to give an absolute answer for this question, but to formulate a general framework which allows the possibility of finding coherent solutions to the problem. The requirements for what we intend to be a good evalution scheme are presented in sec.4.1 In sec.4.2 we describe one of the frameworks for the evaluation presented in [11]. Simulation results illustrating the proposed formulation are shown in sec.5. Sec.6 is devoted to some conclusions.

2. METHODOLOGICAL SUPPORT

This first step for Spectral Analysis supplies answers to the following statement:

> Compute the spectrum, S(f), of a stationary stochastic process x_n from some "a priori" information about it - $2N+1$ values, Rn ($|n| \leq N$), of its autocorrelation function (ACF) and/or other spectrum related functions (e.g. cepstrum), which constitutes the only available knowledge about the process.

In order to approach a solution to the problem we must realize that [2]:

a) The spectrum has to be consistent with the available information and to match it perfectly.
b) No "a priori" assumption about nonavailable information should be made. That is: the spectrum must be non commital in relation to unavailable values.

It seems clear that there are an infinite number of solutions to the problem. The selection of one is a subjective task. Burg [2] proposed a variational principle:

> Find an extremal of a functional of the spectrum under certain constraints, set by the "a priori" information.

The choice of the functional is done according to other kind of considerations: Mathematical, Physical, Philosophical, etc. Sometimes combinations of functionals are used in order to achieve specific goals (see [17, 18]). Some of the most important methods derived from this framework are: Maximum Entropy Method [2], Maximum Flatness Method [10, 12], Minimum Cross-Entropy Method [15] and Minimum Itakura-Saito Distance Method [4].

It is interesting to remark here that two famous spectral estimation methods are not correct "vis-a-vis" our approach: conventional and Capon's ML methods. Conventional method assumes a zero extrapolation of the ACF and Capon's ML method is not consistent with the "a priori" information, since the inverse Fourier transform of the ML spectrum is different from the Autocorrelation Function used as starting point.

3. ALGORITHMIC IMPLEMENTATION

In the previous section we showed how different methods can be constructed from the "a priori" information. However, nothing was said about the acquisition of that information and its use in the computation of spectral estimates. This is the problem to be faced in this section reformulated in the more realistic statement:

> Estimate the spectrum S(f) of a stationary stochastic process x_n from L values of a single realization.

This means that we must estimate the parameters needed to define the spectrum estimate from a finite realization of the stochastic process. Globally we can group the algorithms in two classes according to the use of the signal :

> C1 - Estimate the ACF and, from it, the spectral parameters.
> C2 - Estimate the spectral parameters by looking for an extremum of a functional involving some relations between the signal and those parameters.

In the first case, the parameters may be estimated by two different procedures:

a) - Using theoretical relations between the ACF and those parameters.
b) - Making an interative adjustment of the parameters, by minimizing a function of the error between the original and actual ACF.

Certain algorithms modify procedure a) to include ACF estimation errors and minimize an error functional. In this case we must refer the use of the SVD algorithms (Cadzow [20]).

The algorithms of class C2 do not have a so wide application as those in class C1, because they have been developed mainly for rational methods. In this case, maximum likelihood techniques and least-squares algorithms [1], [8-10] are currently used. Some of the best known algorithms can be easily classified according to those classes, namely:

The algorithms presented in [10] and [11] to implement maximum flatness method belong to class C1;

The Yule-Walker algorithm for maximum entropy AR method belongs to class C1.

The well known Burg method, used in AR spectral estimation, belong to class C2.

The algorithms we just referred are used in spectral estimation of regular stationary stochastic processes. In the case of singular precesses some special algorithms are available: Prony method [7], Pisarenko harmonic decomposition [7] and Kumaresan-Tufts SVD algorithm [17].

4. THE EVALUATION

4.1 REQUIREMENTS FOR THE EVALUATION

Consider the space of the stationary stochastic processes and suppose it devided into classes according to some caracteristics of the processes [e.g. the class of the AR(N) processes]. Take out a process from one class; which spectral estimator should we use to estimate the spectrum from finite realizations of the process?

The methodology for answering the previous question considers each spectral estimator as a "black box" (having finite realizations as input and spectral estimates as output) and lies in four items:

a) Selection of certain features computable both from the spectrum and from the signal.
b) Algorithms for the computation of such features.
c) A measure of "distance" between features.
d) A decison rule.

The selection of features depends on the chosen criterion and may be the most difficult task in the evaluation procedure; the answers to the other three items arise almost naturally from the caracteristics of the features - see the appendix for an example.

The search for features according to a given criterion remains to be the main challenge of the evaluation framework. The higher order zero-crossings, reported in the appendix, are suitable for the evaluation under bias. It would be important to find features according to variance or resolution.

In the following section, we suppose the four previous requirements to be satisfied.

4.2 THE FRAMEWORK

In fig. 1, we propose a framework for the evaluation of spectral estimators. The procedure for two spectral estimators is ilustrated; the generalization is simple.

The general procedure will be:

1 - For $k=1,\ldots,K$

a) Generate a finite realization of the process.
b) Extract its features.
c) Compute the corresponding spectral estimates $S_m(f)$ $(m=1,\ldots,M)$.
d) From each spectral estimate, $S_m(f)$, compute the features.

2 - Compute the mean values of the features in 1 - b).

3 - Compute the mean values of the features in 1 - d).

or, if the true spectrum is known,

3 - Extract those mean values from the spectrum.

4 - For each $m=1,\ldots,M$ measure the "distance" between the values computed in 2 and 3 or 3'.

We choose the spectral estimator with least "distance".

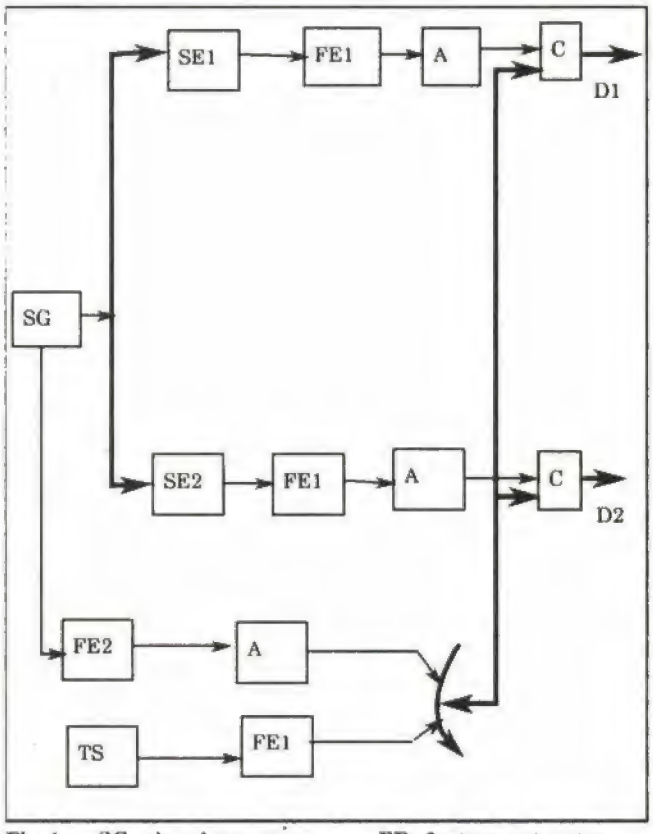

Fig. 1 - **SG - signal generator** **FE - feature extractor**
SE - spectral estimator **A - average**
C - comparator **D - distance**
TS - true spectrum

6. SIMULATION RESULTS

The illustration of the three step procedure we have just described will be done in this section using a simple example. In the first step we maximize the entropy under correlation constraints to obtain maximum entropy AR method. It is known to exist several algoritms to implement this method [13]; we selected four of them: modified covariance (MC) algorithm [13], LSQ Marple's algorithm [9],Burg technique (BT) [2,3] and a modified Burg technique (MBT) [13].

Table 1 shows the results obtained from the comparison of the four estimators, using bias as evaluation criterion. Here, we use the higher order zero-crossings [eqs. (5) and (6) in appendix] as features and the statistic d_L [eq. (8) in appendix] as "distance". The use of these features was motivated by the knowledge of the one to one relationship between the zero-crossings and the ACF. We used

100 50-point long realizations of an AR(4) gaussian stochastic process. We present the results obtained with (first line) and without (second line) the knowledge of the correct spectrum. It is important to remark the coincidence between these simulation results and the theoretical ones presented in [13].

7. - CONCLUSIONS

We presented a three step formulation of Spectral Analysis. As shown, this formulation supplies a user with a well defined framework which allows him to solve his particular data problem. We made a distinction between method and algorithm and defined spectral estimator.

Each spectral estimator is the result of the first and second steps in the present formulation: Methological Support and Algorithmic Implementation. These steps put at the disposal of a user several estimators.

A special attention was directed towards the quantitative evaluation of spectral estimators from a user's point of view. We presented a general framework for such evaluation. The proposed scheme has two important caracteristics: it is easily implementable and does not need knowledge of the true spectrum.

We reported some simulations results concerting the application of the procedure.

REFERENCES

[1] Box, G.E. and Jenkins, G.H. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day.

[2] Burg, J.P. (1975). *Maximum Entropy Spectral Analysis*, Ph. D. Thesis, Stanford Univerdity, Stanford, USA.

[3] Childers, D. - Editor (1978). *Modern Spectrum Analysis*, IEEE Press.

[4] Gray, R.M., Buzo, A., Gray, A.H., and Matsuyama, J. (1980). Distortion Measures for Speech Processing, *IEEE Transactions on ASSP*, **28**, (4), Aug..

[5] Haykin, S. - Editor (1979). *Nonlinear Methods of Spectral Analysis*, Springer-Verlag.

[6] Jenkins, G.M. and Watts D.G. (1969). *Spectral Analysis and its Applications*, Holden-Day.

[7] Kay, S.M. and Marple, S.L. (1981). Spectrum Analysis - A Modern Perspective, *Proceedings of IEEE*, **69**, Nov..

[8] Markel, J.D. and Gray, A.H. (1976). *Linear Prediction of Speech*, Springer-Verlag.

[9] Marple, S.L. (1980). A New Autorefressive Spectrum Analysis Algorithm, *IEEE Trans. on ASSP*, **28**, Aug..

[10] Nadeu, C., Sanvicent, E. and Bertran, M. S. (1981). A New Algorithm for Spectral Estimation, *Proceedings of Int. Conf. on DSP*, Florence, Italy.

[11] Ortigueira, M.D., Tribolet, J.M. and Garcia, R.G. (1981). An Interative Algorithm for Maximum Flateness Spectral Analysis, Florence, Italy.

[12] Ortigueira, M.D. and Tribolet, J.M. (1984). On the Evaluation of Spectral Analysis Techniques, *Proceedings of the Int. Conf, on DSP*, Florence, Italy.

[13] Ortigueira, M.D. and Tribolet, J.M. (1984). Global versus local minimization in AR spectral estimation, *Signal Processing*, **7**: pp.267-281.

[14] Priestley, M.B. (1981). *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press.

[15] Shore, J.E. (1981). Minimum Cross-Entropy Spectral Analysis, *IEEE Trans. on ASSP*, **29**, (2), April.

[16] Tribolet, J.M., Rabiner, L.R. and Sondhi, M.M. (1978). Statistical Properties of an LPC Distance Measure, *IEEE Trans, on ASSP*, **27**. (5), Oct..

[17] --, (1981). *Proceedings of the First ASSP Workshop on Spectral Estimation*, Momaster University, Hamilton, Ontario, Canada.

[18] --, (1982). *Proceedings of IEEE, Special Issue on Spectral Estimation*, Sept..

[19] --, (1982). *Proceedings of the Int. Conference on Spectral Analysis and its use in Underwater Acoustics*, Imperial College, London.

[20] --, (1983). *IEE Proceedings*, **130**, Pt. F, (3), April.

APPENDIX

THE HIGHER ORDER ZERO-CROSSINGS

Let z_n be a zero-mean stationary stochastic process and let D denot the backward difference operator:

$$D\, z_n = z_n - z_{n-1} \tag{1}$$

Define the clipping operator U by:

$$U\, z_n = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad z_n \geq 0 \\ -1 & \text{if} \quad z_n < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Define, also, two processes z_n and x_n by

$$z_n^j = D^j\, z_n \qquad j \geq 0 \tag{3}$$

and

$$x_n^j = U\, z_n^j \tag{4}$$

Suppose that z_n and x_n observed during a L-length interval. The numbers N_L defined by:

$$N_L^j = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L} \left| 1 - x_n^j x_{n-1}^j \right| \tag{5}$$

are called higher order zero-crossings of z_n.
The expected value of N_L^j is not easy to compute in the general case. However, if z_n is a gaussian process [11]:

$$E\left[N_L^j\right] = \frac{L-1}{2}\left[1 - \frac{2}{\pi}\sin^{-1}(\alpha)\right] \qquad (6)$$

where, $j \geq 0$ and

$$\alpha = \frac{R_z^j(1)}{R_z^j(0)}$$

$R_z(n)$ being the autocorrelation function of z_n. As it can be seen, for a fixed j, $E[N_L^j]$ depends on the $j+2$ initial values of the autocorrelation function. It is not hard to conclude that there is a one to one relationship between the set of autocorrelation values and that of the higer order zero-crossings.

As in [11], defines:

$$I_L^j = \begin{cases} N_L^j & j=0 \\ N_L^j - N_L^{j-1} & j=2,\ldots,N-1 \\ L-1-N_j^L & j=N \end{cases} \qquad (7)$$

so that,

$$0 \leq I_L \leq L-1$$

and

$$\sum I_L^j = L-1$$

It can be proved that

$$N_L^j \geq N_L^{j-1}$$

almost surely. In pratice, we verified that N_L^j is an increasing sequence for low N ($N=10$ for $L=500$). Interpreting the increments I_L^j as "frequencies" in a multinomial experiment, we introduce the statistic:

$$d_L = \sum \frac{\left(I_L^j - \bar{I}_L^j\right)^2}{\bar{I}_L^j}$$

where

$$\bar{I}_L^j = E\left[I_L^j\right]$$

This measure has the advantage of avoiding variance computations.

TABLE 1

Cor. Spect. \ Algor.	LSQ	MC	BT	MBT
YES	.205	.205	.22	.216
NO	.282	.282	.295	.288

System: AR (4) - Poles: .8 ± 3.; .66 ± 142.
GAUSSIAN SIGNALS

SSN 0040-1714